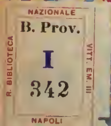



FONDO PIZZOFALCONE


BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio XVI
Palchetto
Num.° d' ordine 21/ 5-7 29


NAZIONALE
B. Prov.
I
342
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
NAPOLI



DE CALCVLO INTEGRALIVM
EXERCITATIO MATHEMATICA

PETRI FERRONI

OLIM

SAC. CÆS. ET AP. MAIESTATIS

LEOPOLDI II.



ROM. IMPERATORIS

GERMANIÆ HVNGARIÆ ET BOIOHEMIÆ REGIS

NVNC

R. C. FERDINANDI III.

MAGNI ETRVRIÆ DVCIS

&c. &c. &c.

MATHESEOS VNIVERSÆ AC PRÆSERTIM REI AQVARIÆ A CONSILIS

IN PISANO LYCEO MATHEMATVM PROFESSORIS

XLVIRI SOCIETATIS ITALICÆ

ET HVMANIORVM LITERARVM FLORENTINÆ

INSTITVTI BONONIENSIS SOCI

ACADEMIÆ ELECTORALIS MANHEMI

REGIÆ SCIENTIARVM NEAPOLITANÆ

TAVRINENSIS MANTVANÆ

ETC.

PHYSIOCRITICORVM SENENSIS

ETRVSCÆ CORTONENSIS

AVGVSTÆ PERVSINÆ ETC.

AGRARIÆ ET LIBERALIVM ARTIVM IN PATRIA SVA.

FLORENTIÆ M.DCC.XCII.

EX TYPOGRAPHEIO PETRI ALLEGRINI

REI LIBRARIÆ PRÆFECTIS ADNVENTIBVS.

BENE SPEREMVS: HOMINVM ENIM VESTIGIA VIDEO.

Edmundi Halleii ex Codd. MSS. Editio Graecolatina Oxoniensis (*Not.* 7.) anno Dom. M.DCC.X. *Apollonii Pergaei Conicorum Libb. octo et Sereni Antissensis de Sectione Cylindri et Coni Libb. duo* cum Pappi Alexandrini Lemmatis et Eutocii Ascalonitae Commentariis in aenea Tabula Vitruviana titulo adiuncta.

IN . ADVENTV . SOLLEMNI . ET . FAVSTISSIMO

FERDINANDI . III . AVSTRIACI

AVGVSTORVM . FILI . NEPOTIS . PRONEPOTIS

ETC . ETC . ETC

MAGNI . ETRVSCORVM . DVCIS . X

PATRIS . PATRIÆ

PRINCIPIS . OPTIMI . MAXIMIQ.

AD . GRANDIA . NATI

QVOD

SCIENTIÆ . OMNES . BONÆ . ARTES

LITTERÆ . ELEGANTIORES

MEDICEORVM . TEMPORVM . REDITVM

SIBI . COMMVNITER . PLAVDENTES

VOTA . INTER . PVBLICA . POLLICEANTVR

SOPHIÆ . GENIO . ETRVRIÆQ . NVMINI

DEVOTVS . AVCTOR

V . IDVS . APRILES . A . R . S . CIƆIƆCCXCI

ἈΝΈΘΗΚΕ.

ERRATA TYPOGRAPHICA PRÆTER HEIC CASTIGATA,
SI QVÆ FVERINT
OCVLIQ. ACIEM EFFVGERINT,
SPERATVR HAVD MVLTA REPERTVM IRI
NOTATV DIGNA.

Pag^{is}.	Lin^{is}.		
46.	18.	$\sqrt{z}$	$\sqrt{2}$
50.	11.	A, H	A, F
119.	5.	Ellipticorum	Hyperbolicorum
136.	4.	dx	dz
176.	7.	6^{ti}.	3^{ii}.
213.	8.	*PIM*	*PSM*
270.	30.	extimata	aestimata

CETERA VEL GRAMMATICEN VEL ORTHOGRAPHICEN FORTASSE OFFENDENTIA ERVDITVS CORRIGAT LECTOR.

ANTELOGIVM.

INTER schedarum collectanea, quibus elapso longi iam temporis intervallo studia mea consignaveram, duo potissimum prelo paratae erant lucubrationes. Harum prima, instante meritissimo Praeside Equite Antonio-Mario Lorgna, prodiit Veronae anno proxime praeterito in Volumine V^{to}. Actorum Societatis Italicae (1); altera est, quae nunc in lucem publicam editur patriis typis ornata. Commune earum argumentum deprompturn esse liquido constat ex Calculo Integralium, uti technice vocant Matheseos cultores; veruntamen valde dissitae ac toto ferme caelo diversae disquisitionum species, quibus utraque delectatur. Dum etenim Veronensis ad universum spectat Calculum Integralem, quippe quae de conditionibus loquitur, quibus positis aut denegatis vel Summae capax ſit vel Summa careat Aequatio quaelibet aut Functio Differentialis, Florentina viciſſim difficillimam quidem, sed unicam Integralis eiusdem Calculi partem complectitur, scilicet illam, quae praeter Circulum et Parabolen arcuum Sectionum-conicarum opes quaerat atque praeſidium (2). In hoc autem conveniunt quod utraeque sublimitatem loci, in quo a primis eorum auctoribus conlocata fuerant haec inventa analytica, adeo complanent, ut Elementis reſtituta quodammodo videantur. Eâdem igitur ratione, qua conditiones, sine quibus irrita foret inveſtigatio Integralis Differentialium, ad rudimenta revocavi doctrinae Curvarum (3), non diſſimiliter Integralia,

gralia,

gralia, quae consequantur a perimetris Ellipseos et Hyperbolae, tutissimo tramite nunc deducere experiar ab adfectionibus Circuli. Ars vero omnis studiumque in Scientiarum dignitate promovenda non tam inventorum copiam, quam aptam eorundem sedem & ordinem respiciat necesse est, ne forte quae facillima sint, e longinquo petantur, neve rationales disciplinae principiorum multitudine confundantur atque fatiscant. Ut enim qui problema tractet, ab Euclide, Apollonio, aut a primis Algebrae fontibus non difficiliter hauriendum, instituti sui munus implere neutiquam censendus esset si obliquos nimium canonas et calculorum farraginem adhibuerit (4), ita etiam arbitror Scientiarum systema valde perturbatum iri semel ac quae unum et idem sint veluti diversa fuerint agantur, quae simplicia ac venusta suapte natura sint contorqueantur (5), neque satis constet de rerum cognatione et intimo foedere, quo saepenumero fit, ut primo adspectantibus disiunctae videantur, nihilo tamen minus inter se coniurent amice (6). Eapropter maximo semper in pretio habendi erunt immortales illi duumviri Galilaeus atque Newtonus, quorum primus perlevibus Geometriae principiis suffulsit, sed mirum in modum locupletavit, et ad vitae commoda augenda perduxit absque fucis et inglorio pulvere Philosophiam (7), alter auspiciis felicioribus (8) atque unica vi centripeta duce novum paene condidit Universum (9).

Haec iampridem meditanti praestantissimam non modo mihi contigit Exponentialium omnium, Logarithmorum, et Functionum Circuli provinciam, hactenus a Cartesii Algebra segregatam, ipsi Algebrae restituere (10), verum etiam Logisticam Curvam describere in Albo Parabolarum (11), Quadraturas arithmeticas Brounckeri, Wallisii, Leibnitii, alio-

rumque

rumque ab unico fonte derivare (12), Series infinitas quamplurimas, vulgatas quidem, sed per diversa itinera distractas coniungere in unam (13), Summam differentialis Logarithmici absque praesentia Hyperbolae reperire in Calculi penore (14), aliaque non admodum levia inventis addere occasione perinsignis, in quo tum versabar, argumenti, consiliique suscepti eorum, quae potissima rei mathematicae capita sint, imperium amplificandi. Quod quum nec sine aliqua Geometrarum commendatione (15), nec sine amicorum plausu receptum fuerit, non abs re fore putavi experimentum idem de sublimiori etiam Mathesi proferre, ratus ad abstrusam valde ac molestam Integralis Calculi partem haud parum nitoris et decoris accessurum si ab unica tertii Elementorum Euclidis propositione (16) originem ducere videretur. Praeterquamquod ingenii vires acuuntur, et animum subit rara voluptas in contemplanda rerum omnium successione, earumque praecipue maxima per intervalla dissitarum unitate detegenda, occurrit etiam ut ii, qui optatam metam contingere satagant avidissime, nova quaedam, nec oppido insubide traducenda, in itinere conligant, scientiaque ipsa promoveatur. Stimulis hisce excitatus sedulam itaque navavi operam, ut quà ab aliis tradita perpoliendo, quà Transalpinorum et nostratium naevos emendando (17), quà nova adiiciendo, nec ob nimiam bonae frugis molem quod in argumento primas tenebat in abscondito maneret, nec contra ob nimiam paupertatem atque sterilitatem Exercitatio ista vilesceret. Quibus autem subsidiis profecerim, quo ordine procedat res, quae scitu utiliora, quidnam novi signanter interspersum, quae aliorum vitia castigata (18), non est huius loci praefari. Enimvero mathematice scripta non sine vulnere contrahuntur; adeo ut ne a Synopsi quidem in calce huius Exer-

 cita-

citationis adpoſita exactum, et omnibus numeris abſolutum argumenti ſpecimen expectandum ſit, sed rude potius totius Operis lineamentum ac promtuarium.

Duo tamen de induſtria potiſſimum curae habui, fidelem, ſcilicet, et ad rationem temporum auctorumque iura tuenda adprime facientem enarrationem dum hiſtoricum agere oportebat (19), ac modeſtum ſimul et impavidum orationis genus dum religio erat a quorundam placitis non diſſentire (20). Profecto, ſi quid ego iudico, bonarum artium et disciplinarum omnium εὐεργέται dicendi sunt non tam qui novis illas ditaverint adceſſionibus, quam qui ab erroribus doctiſſimorum etiam hominum, qui forte irrepserint, eas expurgatum iri curaverint. Quod tametſi hac noſtra praesertim aetate, quae scatet illitteratis litterarum detractoribus (21), periculosae plenum opus ſit aleae, nihilominus laudandum arbitror, dummodo vitium biceps evitetur, a quo proclive et facile effugium. Primum etenim nefas eſt imitari miserrimos illos nugarum insectatores, qui in severiori scientiarum cultu incomtum mordeant verbum, aut captantes tantummodo inania (22) aures omnium latratibus impleant, perinde ac ſi sermo eſſet potius de vocum delectu, quam de apta rerum dicendarum ſignificatione et dignitate, nec quidpiam exiſteret scitu dignum praeter veneres atque flores eloquentiae et poëseωs (23). Alterius vitii remedium in eo poſitum eſt, ut non contumeliis, sed rationum pondere de aliorum lapsu sententia feratur. Dedecet namque virum Mathematicum futile muliercularum dicterium, plebisve insanientis (24), vel locutoris alicuius impudici labor improbus; et contra qui rem polemicam agens caſte atque urbane obiiciat, ac ne languida fiat oratio, modico etiam Atticorum sale obiicienda interspergat

gat, omne punctum tulisse eruditorum suffragiis censendus erit (25).

Quidquid autem sit de temporum iniquitate, eorumve, qui idgenus studia despicatui habeant, alacri nihilominus animo et pro virili mea ad hanc Spartam ornandam adccedere non dubitavi. Movemur enim, nescio quo pacto, inclytorum hominum, qui nobis praeiverunt, exemplis, iisque locis, in quibus eorum, quos admiramur, adsunt vestigia (26). Quum igitur Patriae meae nec praeclara desint Geometriae monumenta in aeternum duratura, nec qui a Musis severioribus alti laetique sublimia petant, idque in deliciis habeant, quod alii stultitiam nuncupare audent (27), natum exinde, ut quod in Adversariis meis brevi manu atque iuxta morem festinanter descriptum fuerat, quanta potui diligentia concinnaverim, et advocatis undique subsidiis suppleverim, quo facto ita praeter animi destinationem in ampliorem molem excrevit, ut alia varii argumenti, quae simul in lucem emittere meditabar, in aliud tempus differrem. Et sane praesidium mihi maximum adtulerunt Academiarum per Europam celebriorum Collectiones nuperrimae, aliaque remotissimarum gentium Volumina vel ad raritatem redacta, vel ingenti numerata pecunia comparanda (28), quibus frui inter domesticos lares singulari equidem beneficio Augustissimi Caesaris LEOPOLDI II^{di}. concessum mihi fuit libentissime ex Bibliotheca olim Palatina, nunc Physices et naturalis Historiae Musei Florentini.

Levia haec forsan, et aliquorum palato minus grata, quae in praesens publici iuris facienda curavi. Sed non is ego sum, qui cedro digna promere valeat, seque et sua sola miretur (29); semperque abstinui (nec inconsulto) a Mathematum laudibus impensius colendis, quandoquidem uno pene

versiculo

versiculo tritum illud et in ore pueris habitum Galilaei effatum panegyricam orationem omnem concludit (30). Ceterum si, quae Mathematicis scripsi, in eorum cedant commodum atque utilitatem, satis ero beatus.

Utinam quae iussu Principis Optimi Maximi composui Consilia, minime poenitenda, typis excudere licuisset: nullus enim dubito quin communi adprobationis calculo et me bene aliquando de Republica meruisse in aperto constaret. Plurima quidem, quae subditorum commercia et arvorum adtinent ubertatem, aut vias demonstrabant per ardua montium patefaciendas, aut fines Etruriae regundos, aut portus in oris maritimis amplificandos, aut fossas navigabiles ab inchoato educendas: alia, quae populorum saluti publicae consecrantur, vel paludibus exsiccandis providebant, vel aquaeductibus opere quà concamerato, quà arcuato exstruendis, vel fluminum exundationibus eorumque vadis aggerum et pontium mole coërcendis: pauca vero ad Hydraulicen polemicam pertinebant, quam a primo utique studiorum tempore semper semperque odio habui. Sed Principe ipso in regnandi artibus philosophante, publicarumque rerum propugnatore et vindice, maiora etiam adgressus de re censuali (31), de iuribus civium servandis, de imperii maiestate tuenda, de legum ferendarum archetypis, aut latarum vitiis, si quae fuerant, quorum omnium autographa in Archivorum loculis iamdudum reposita prelo subiicere nefas esset. Quae si quibusdam fortasse modesta minus aut nimis aestuosa visa fuerint, neutiquam ego, sed veritas ipsa obiurganda (32).

Exercitationes aliae, quibuscum labor iste societatem iniverat, Lineas quasdam ordinis quarti complectentes a Bernardo Bragelongnio vix in limine salutatas (33), et de Thoma

Perellio

Perellio loquentes aliquot ante annos vita functo, necnon de usu Logiſticae in theoria et praxi sonorum, brevi prodibunt. Neque imparati adeo sunt Tractatus duo de Cochlea et fundamentis Mechanices, ut solemni litteratorum ritu mihi hodie spondere vetitum ſit quantocius ad finem usque perducturum, dummodo et otium ſuppetat et infirma id ſinat oculorum vis in diuturno Reipublicae servitio perquam maxime debilitata. Accedent excerpta Praelectionum Academicarum, analectaque demum ad Phyſicen-mathematicam pertinentia, quorum poſtrema, tum quia errores inluſtrent graviſſimos de re praesertim aedificatoria et aquaria, in quos lapsi sunt nescio quo fato, quove artis miraculo homines eruditi (34) aut saltem maximo in pretio habiti (35), tum quia pacato sereneque vultu, ut philosophum decet, veritatis hoſtium inſidias repellere moleſtiſſimum plerumque ſit; probatiores et cordati viri vel me senio confectum in vulgus edere, vel amicis ex teſtamento commendare hortatum conſiliumque humaniſſime praebuerunt (36). Quod si fecerim, et impavide fecerim aliquando, veritatem obteſtor nihil aliud praeter amorem Patriae praesentiſſimum habiturum, ne forte omnia, quae ab Italis hac tempeſtate in Italia scribuntur aut fiunt, ii qui ultra Alpes et Mare degunt Italis omnibus placuiſſe arbitrentur (37).

Fuit haec ſtudiorum meorum ratio, hi fructus sunt (38), haec vota et promiſſa solvenda. Sin autem nec honeſta paupertas prohibuerit, nec spem fefellerit optatus diu, sed iterum iterumque intermiſſus divinae Palladis cultus, confido omnia haec amoeniſſima celerrime ac praeter expectationem absoluturum. Praesertim ſi laborum moleſtiae sublevandae adiutores eos impetraverim, quorum consuetudinem et familiaritatem

tatem ubicumque mihi pergratam fuisse memoria repeto, quos inter, aut ingenii aciem spectes, aut omnigenae eruditionis copiam; aut eximias animi dotes, maximi facio Angelum de Iudicibus Patricium Arretinum in Patrio Seminario Mathesin cum omnium plausu docentem, et Aloysium Bombiccium in Florentina Curia Advocatum, a natura simul et arte ita exornatos, ut in publica commoda peccet nisi propitior utrique adrideat fortuna. Dum igitur et fastidiosae contextus typorumque conlationis, et schematωn ære sculptorum taedii, et implexi plerumque calculi repetendi, et quamplurium Voluminum ad doctrinae atque auctoritatis fidem pervolutandorum cura fuerit alterutri demandata, additamenta non deerunt, nec observationes praeceptionesque novae cum iis coniungendae, quae a prima iuventute abunde satis, sed nulla dispositione ac sede servata, nulla temporis iactura facta, congessi, manumque ideo exoptant, quae recte minus scripta deleat, suppleat omissa, obscuris nitorem, inamoenis gratiam, difficilibus explicationem, cunctisque ordinem tribuat et veritatem. Quo neque maius desiderare, neque unquam adsequi possem: sunt enim hae disciplinae, quas propius tracto, tum satis superque periucundae instar omnium magnarum rerum, quarum altitudo nos ubique delectat, tum a priscis usque temporibus, quum nuda veritas adhuc placeret, maximo semper in honore habitae ita ut earum praesidio vigerent artes, summumque inter homines certamen esset ne quid profuturum saeculis negligeretur (39).

NOTÆ

N O T Æ
IN ANTELOGIVM.

(1) Titulo distinguitur *Prodromo d' Osservazioni sopra il Trattato di Calcolo Integrale pubblicato in Parigi dal Sig. Marchese De Condorcèt l' anno M. DCC. LXV.* (pag^{a}. 130ma. et seqq. usque ad 163^{iam}.). Qua occasione admoneo emendandum esse lapsum Praefationis Voluminis secundo additae *Institutionum Analyticarum Vincentii Riccati et Hieronymi Saladini*, qui pag^{a}. X^{ma}. editionem primam illius Tractatus ad annum M.DCC.LXVI^{m}. retulerunt. Docti autem viri hunc Prodromum norunt ita potius inscriptum *Memoria sul Calcolo Integrale pubblicata in Verona a spese della Società Italiana l' anno M. DCC. XC.* cum adiuncta epigraphe ΤΩΝ ΠΟΝΩΝ ΠΑΝΤΑ. Plura enim in Veronensi editione typorum menda inveniuntur, quorum quae Insubriae potius, quam Etruriae linguam sapiunt, libenter omitto; sed tria potissimum corrigam, quae offendunt Analysin, praeter S' vice S in linea 5^{a}. pag^{ae}. 157^{mae}. Ad pag^{am}. 150^{mam}. pro $dG=(dG+ddI)=0$ scribendum erat $dG-(dG+ddI)+ddI=0$; rursum in v. 14to. pag^{ae}. 160 est $\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{ddx}$ vice $\frac{dx^2+dy^2}{ddx}$, et in pag^{a}. 162da. $d\left(\frac{2}{v}\right)$ exstat vice $d\left(\frac{z}{v}\right)$ contra fidem autographi. Pag^{ae}. vero 143^{ia}. 145ta. habent §§^{os}. 5. 6. pro 8. ac 9.; pag^{a}. 158. *curva superficie* vice *Curva, Superficie*; Notaeque in pag^{is}. 133. 147. et 161. male scriptum continent 414. pro 441., 26. pro 96., atque 547. pro 347. Adde 147. pro 127. in Nota p^{ae}. 157^{mae}.

(2) Obstupui dum legerem in Elogio Alemberti, quod continet *Historia Regiae Scientiarum Academiae Parisiensis* anni M.DCC.LXXXIII[ii]. editionis M.DCC.LXXXVI[ti]., diligenter enumerata praeclarissimi illius Geometrae inventa de Calculo Integrali p[is]. 85. 86. 109., sed ea omnia omissa vere pulcherrima, quae de Formulis agunt a rectificatione Curvarum heic memoratarum dependentibus.

(3) Principium revera unicum, quo innititur *Prodromus* antea dictus, in eo situm est, ut si quaelibet area Curvae detur ABCD (Fig[a]. 1[a].), ipsaque varietur quomodocunque, sed infinite-parum, quo facto evadat $A\beta C\delta$, sit tota variatio $B\beta D\delta$, aequalis Summae partium coacervatarum $E\beta\varepsilon E$, $E\varepsilon\varphi F$, $F\varphi\gamma G$, $G\gamma\pi H$, $H\pi\delta D$ etc., quod resolvitur in Axioma purum Euclidis. Consulatur Adnotatio 3[ia]. eiusdem *Prodromi*. Qua occasione observandum etiam censeo Disquisitionem Fontainii sub titulo *Addition à la Methode pour la solution des Problêmes* de maximis et minimis, in *Actis Academiae Parisinae* etc. anni M.DCC.LXVII[i]. editis anno M.DCC.LXX[mo]. haudquaquam infirmavisse, uti mens erat Auctoris, Calculum *Variationum* a Ludovico De La-Grange Tourniero ingeniosissime concinnatum. Ceterum Historia mathematica passim edocet celeberrimis etiam speculationibus invidiam turpissimam reluctari. Exemplum videbis perinsigne in *variationum* memorato Calculo sublimiori, si totum perlegeris Dissertationis initium *Sur la Methode des Variations par M. De La-Grange* ad pag[am]. 163[iam]. Voluminis IV[ti]. *Miscellaneorum* Academiae Taurinensis.

(4) Dum Pisis essem studiorum caussa vertente anno M.DCC.LXI[o]., perinde ac si novum fuisset, circumferebatur Problema de recta ABC (Fig[a]. 2[a].) ita ducenda a *dato* puncto A in Peripheria Circulari *data* AGLHM, ut segmentum eius BC sit radio aequale. Problema autem istud Quaesitorum primum iam fuerat a Praeposito Claudio Comierso, homine Gallo, sed

toto-

toto ferme saeculo tum elapso Mathematicis Italis in certaminis formam missorum, quemadmodum liquet ex Opusculo Vincentii Viviani Florentiae edito sub annum M.DC.LXXVII^{um}., cui titulus *Enodatio Problematum Gallicorum etc.* Nihilo tamen minus idem Problema implexis atque admodum prolixis calculis algebraicis resolutum nonnulli studiosorum Analyseos mihi ostenderunt decimumsextum aetatis annum agenti. Algebra reiecta illud extemplo enodavi hunc in modum. Emissa chorda AON perpendiculari ad diametrum positione *datam* LVM, Centro O, Axe transverso AN describatur aequilatera Hyperbola RAQSNT; deinde Axe GVH, ac Parametro, quae radio GV sit aequalis, describatur Parabola Apollonii KLGMI. A quatuor intersectionis Curvarum earundem punctis P,G,K,I emissis normalibus ad diametrum, scilicet PB,GV,KF,IE, et a puncto *dato* A ductis rectis ABC,AVD,AXF,AZE, hae universaliter Problema solvent. Revera ex Parabolae proprietatibus est PB media harmonica inter segmenta LB,BM; ex adfectionibus autem Hyperbolae PB aequalis AB: igitur AB est media harmonica inter LB,BM, et idcirco ex natura Circuli BC media arithmetica, nimirum aequalis radio. Idem de ceteris; sed punctum V demonstrationis non eget utpote centrum Circuli. Ludus iste puerilis, cuius fama in Academia Pisana percrebuit, maximum olim mihi conciliavit honorem nescio quo pacto, nisi forte dixerim summopere laudatum ea tempestate qui geometricam Analysin et Synthesin nosset. Omnium denique plausu acceptus iterum fui quum Academicos ipsos monuerim hoc Problema idem esse cum antiquissimo Gymnasii Platonici de anguli trisectione, ideoque facile revocandum ad intersectionem unius tantummodo Conicarum et Circularis Circumferentiae. Quid autem dicam de subtilissimo Tinseau? Hic ut Theorema demonstret, a quo pendet mensura omnigenarum Superficierum, praemittit Lemma 2um. in eleganti Dissertatione (pag^{a}. 593.) Voluminis IX^{i}. Collectionis

inscriptae

inscriptae *Mémoires de Mathématiques et de Physique présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers Savans etc.* editionis Parisinae anni M.DCC.LXXX[i]., quod Lemma, Sphaericorum ope ab eo demonstratum, nihil aliud est quam Theorema vetustissimum Pythagoricum Trianguli rectanguli. Quid de Bossuto? Qui in Collectionis eiusdem Volumine II°. de frustis disserens Conoidis Parabolicae, praesidio Algebrae totam agit rem Synthesi facillima demonstrandam, ne omissa quidem trita et omnibus nota proprietate Conoidis illius, nempe quod sectiones Basi perpendiculares Parabolae sint eaedem cum genitrice rotundi Solidi *dati*.

(5) Autumant Scriptorum quidam *pulcritudinis* essentiam repositam esse in formarum lineamentis molliter inflexis, aut undas aurarum spiritu agitatas imitantibus, vel ut Graeci aiebant δρακοντοειδῶς. In hanc sententiam iverunt qui etiam illud Hesiodi Ἑλικοβλέφαρος (Winkelmanni Volumen I[um]. Operis celeberrimi *Storia delle Arti del Disegno etc.* pag[a]. 367. editionis Romanae an. M.DCC.LXXXIII[i].) pro oculorum palpebris Venere dignis sunt interpretati. Opinionis huiusce coryphaeus est Historiarum pictor insignis Hogarthus Anglus, qui in sua *Analyse du Beau*, quam legi gallice translatam, obscuros versus Plinii senioris (Lib. XXXV°. Cap. 6°. *Hist*[ae]. *Natur*[lis].) haud parum oblique intellexit, quos ad fidem contextus Codicum antiquorum rectius interpretari studui una cum aliis illustrationibus *Rerum Geographicarum* Strabonis in *Selectis Physico-mathematicis* hactenus ineditis. Quidquid autem sit de pictura, statuaria, aliisque artibus delectationi ac voluptati inservientibus, Scientiarum omnium expositio non per curva et obtorta, sed per recta et breviora procedat necesse est ad earum dignitatem, facilitatem, ἀκρίβειαν, et veram pulcritudinem consequendam.

(6) Consulantur Epistolae elegantissimae Philalethis in Opusculum de Papyri Herculanensis interpretatione, quo ex Theo-

phrasto aliisque Graeciae scriptoribus melioris notae, et icone saepius adposita illud A. Persii Flacci (Sat. III^a. v. 30.) *Ego te intus, et in cute novi* exornatur.

(7) *Sapientia, σοφία, scientia, cognitio, contemplatio manca quodammodo atque inchoata est si nulla rerum actio consequatur: ea autem actio in aliorum commodis tuendis maxime cernitur.* (Cic. de Officiis Lib. I°. C. 43. 44.).

(8) Newtonus fortasse philosophorum unicus, qui „ viris ante fatum carus traduxerit leniter aevum „ (namque „ alii vitam, dum moriuntur, agunt „), impune et laudatus veritatem docuit, quinimmo pro veritate docenda honores divitiasque cumulavit. *De tous les hommes, qui ont osé voir plus loin que le vulgaire, il est peut-être le seul, qui dans le cours d'une longue vie ait obtenu dans sa patrie les distinctions dûes à son merite et à ses travaux. Toute l'Angleterre eut pour lui une vénération, dont il a joui sans trouble et sans interruption.* (Londres *Tome premier* pag. 454.). Ex adverso Galilaeus et in prima iuventute, et in virilitate, et in extrema senectute, etiam oculis captus, sustulit insidias hominum maleferiatorum, occubuitque exul a Patria sua amplexus inter et oscula Torricellii ac Vivianii.

Helas! la vérité si souvent est cruelle,
On l'aime, et les humains sont malheureux par elle.
(Fran. Volt.)

(9) Ad rem facit Petrus Ludovicus Mauperduisius ita scribens. *Le spectacle de l'Univers devient bien plus grand, bien plus beau, bien plus digne de son Auteur lorsqu'on sait* qu'un *petit nombre de loix, le plus sagement établies, suffisent à tous ces mouvemens.* (Artic. II°. *Dissertationis de legibus motus et aequilibrii* ad pag^as. 286. 87. Voluminis *Actorum Regiae Berolinensis Academiae* pro anno M.DCC.XLVI°., in lucem editi an. M.DCC.XLVIII°.).

c Elegantius

Elegantius tamen et sublimius Alexander Popius vernaculo idiomate scripsit

Naturam, legesque suas nox atra tegebat:
Sit Newtonus, ait Deus, et lux cuncta fuerunt.
(Ex versione Io. Salvemini Castillionei.)

(10) Omnia deducuntur a notissima Formula, quam vocant Binomii Newtoniani, in meo Opere Florentiae edito an. M.DCC.LXXXII°. *Magnitudinum Exponentialium etc.* Hac autem occasione adnotandum puto haud recte Cl. Aepinum in *Demonstratione generali Theorematis Newtoniani de Binomio ad Potentiam indefinitam elevando*, quam inter alia continet Volumen VIII^{vum}. *Novorum Commentariorum Academiae Petropolitanae* pro annis M.DCC.LX°. et LXI°. editum an. M.DCC.LXIII^{io}., adseruisse (pag^{a}. 170.) demonstrationem ordinariam illius Formulae *salva veritate* complexam non esse eos casus, quibus *m* (exponens) non fuerit numerus integer positivus. In Algebrae etenim Elementis passim exstant demonstrationes *per aequipollentiam* eiusdem Formulae dum exponens fuerit etiam vel integer negativus, vel fractus positivus et negativus, ac sine infinite-parvi suppetiis, quum ex adverso idgenus praesidium effugere non contigerit Aepinianae. (Vid. N^{um}. 11. p^{a}. 174.). Istud etiam latuisse miror Franciscum Pezzium, qui occasione versionis Gallicae *Introductionis* Euleri *in Analysin Infinitorum* Voluminis I^{i}., quae versio prodiit Argentorati anno M.DCC.LXXXVI°., ipsomet et Krampio curantibus, demonstrationem protulit in Tomo V°. *Memorabilium Societatis Italicae* anni M.DCC.XC^{i}. formulae illius (pag^{is}. 423. 24. 25.) $(Cos. z \pm \sqrt{-1} . Sin. z)^{\frac{s}{r}} = Cos. \frac{s}{r} z \pm \sqrt{-1} . Sin. \frac{s}{r} z$. (Vid. Leonardi Euleri *Dissertationem* in Volumine XIX^{no}. Imperialis Academiae Petropolitanae pro anno M.DCC.LXXIV°, ad pag^{am}. 103.,

103., atque meum Opus *Magnitudinum Exponentialium* etc. ad pag^{am}. 203.).

(11) Sic exposui in Capite VIII°. Operis praecitati n°. 345. p^{is}. 509, 510. Quod miraculo proximum videretur Evangelistae Torricellio si ad vitae auras rediret, utpote qui Logisticam ex adverso *Hemihyperbolen* nuncupaverat in MS. Anecdotorum eius, quae simul iuncta adservantur Florentiae in Bibliotheca Regii Physices Musei. Logisticam ipsam prouti limitem Parabolarum consideranti, scilicet, Aequatione gaudentem $v^{\infty} = \frac{\infty}{1}^{\infty} . y$, facillimum etiam est mensuram invenire cuiuslibet Frusti Solidi rotundi infinite-longi inter duos Circulos ad axem normales comprehensi, quam ibidem neglexeram. Revera huiuscemodi Frustum differentia est inter duo Solida infinite-longa, et idcirco $= P . y^2 . \frac{1}{2} - P . y'^2 . \frac{1}{2} = P (y^2 - y'^2) . \frac{1}{2} =$ medietati Annuli Cylindrici vel Cylindri, qui Basim habeat differentiam Basium Frusti *dati*, et Altitudinem Subtangenti aequalem, quemadmodum Hugenius aliique scripserunt. Idem de reliquis omnibus a Torricellio et Grando demonstratis.

(12) Tota res pendet ab Hyperbolae proprietate, quam primus omnium explicavi in Capite VI°. Operis memorati §°. 257mo. Eo in Capite, praeter quadraturam a Cartesio datam (in Excerptis ex eius MSS.), quam summopere illustravit Leonardus Eulerus in citato Volumine VIII°. Imperialis Academiae Petropolitanae (Vid. *Annotationes in locum quendam Cartesii ad Circuli Quadraturam spectantem* p^{a}. 157.), ceteras, quae mei non erant instituti, nempe syntheticas, omisi, quibus praecellit ingeniosissima ab Outhiero tradita in II°. Volumine Collectionis Academicae, de qua superior 4^{a}. Adnotatio loquitur. Dum autem Eulerus de Quadratura Cartesiana disseruit, oblitus fortasse fuit Seriem illam

Iam infinitam $\frac{1}{Cos.\,\varphi.\,Cos.\,\frac{1}{2}\,\varphi.\,Cos.\,\frac{1}{4}\,\varphi.\,Cos.\,\frac{1}{8}\,\varphi.\,Cos.\,\frac{1}{16}\,\varphi.\ \text{etc.}}$

$= Sec.\,\varphi.\,Sec.\,\frac{1}{2}\,\varphi.\,Sec.\,\frac{1}{4}\,\varphi.\,Sec.\,\frac{1}{8}\,\varphi.\,Sec.\,\frac{1}{16}\,\varphi\ \text{etc.} = \frac{2\varphi}{Sin.\,2\varphi}$, quam hoc in loco demonstrat (ad pag^{am}. 165^{tam}. ac Num^{os}. III^{ium}. et IV^{um}.) ope Calculorum differentialis, integralis, et logarithmici, a se ipso multo antea fuisse simplicius explanatam. (Legatur Dissertatio *De variis modis Circuli quadraturam numeris proxime exprimendi* (pag^{is}. 234. 35. 36.) in Volumine IX°. pro anno M.DCC.XXXVII^{mo}. edit. M.DCC.XLIV^{ti}. veterum *Commentariorum* Academiae Petropolitanae). Sua etenim antiquior Series A =

$\frac{Sin.\ A}{Cos.\,\frac{1}{2}\,A\,.\,Cos.\,\frac{1}{4}\,A\,.\,Cos.\,\frac{1}{8}\,A\,.\,Cos.\,\frac{1}{16}\,A\,.\,Cos.\,\frac{1}{32}\,A\,.\ \text{etc.}}$, facto $A = 2\varphi$, vertitur in recentiorem $\frac{2\varphi}{Sin.\ 2\varphi} =$

$\frac{1}{Cos.\,\varphi\,.\,Cos.\,\frac{1}{2}\,\varphi.\,Cos.\,\frac{1}{4}\,\varphi.\,Cos.\,\frac{1}{8}\,\varphi\,.\,Cos.\,\frac{1}{16}\,\varphi.\ \text{etc.}}$. Illa Series antiquior innititur solummodo Aequatione $\frac{Sin.\ A}{Cos.\,\frac{1}{2}\,A} = 2\,Sin.\,\frac{1}{2}\,A$,

quae adeo facilis est, ut si Fig^a. 3^{ia}. inspiciatur, ubi sit arcus BD = A, bifariam divisus in C, statim liqueat propter Triangula similia FIC, EBD proportio FI : IC :: BE : BD = 2DO, vel $Cos.\,\frac{1}{2}\,A : 1 :: Sin.\,A : 2\ Sin.\,\frac{1}{2}\,A$, orta (quemadmodum hic experior) a natura ipsa quadrantis Circuli ABD, videlicet ab Euclide. Sed eadem Series, ubivis gradum sistat, ipso innititur principio, nimirum Euclide. Exemplo sit expressio

$Cos.\,\frac{1}{2}\,A\,.\,Cos.\,\frac{1}{4}\,A\,.\,Cos.\,\frac{1}{8}\,A\,.\,Cos.\,\frac{1}{16}\,A\ldots.Cos.\,\frac{1}{2^n}\,A$, quod Productum

ctum per methodum ipsam Euleri adaequat $\frac{Sin.\ A}{2^n.\,Sin.\,\frac{1}{2^n}\,A}$. Casus autem singularis, dum Series abeat in infinitum, iterum oritur in hypothesi τῷ $n=\infty$; namque illico fit $\frac{Sin.\ A}{\infty\,.\,Sin.\,\frac{A}{\infty}}=\frac{Sin.\ A}{\infty\,.\,\frac{A}{\infty}}=\frac{Sin.\ A}{A}$, uti superius. (Conferatur *Dissertatio*, quae exstat in I^ma^. Parte Voluminis II^i^. *Actorum Societatis Italicae* ad pag^am^. 123. et seqq., in lucem editorum Veronae anno M.DCC.LXXXIV^to^., et signanter pag^s^. 126. 127., ubi ipsamet antiqua Euleri methodus tum pro Serie Cosinuum, tum pro alia Secantium, Eulero tamen innominato, adhibetur.)

(13) Quidam Geometrarum Litteris mihi scriptis expostulaverant communicationem demonstrationis Theorematis illius Serierum infinitarum, quod continet Adnotatio in calce pag^ae^. 396^tae^. Operis *Magnitudinum Exponentialium etc.* Facillimum sane Theorema, sed „ eo ipso illustrius quod desideratur „. Petitioni humanissimae sic satisfacio. Prima Serierum $1-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{2.4.5}-\frac{1.3}{2.4.6.7}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}-$ etc. $=\frac{2.4.4.6.6.8.8.10.10.\ etc.}{3.3.5.5.7.7.9.9.11.\ etc.}=\frac{P}{4}$ ex dictis in pag^a^. 394ta. Altera vero Series eâdem in pag^a^. 396ta. exposita $1-\frac{1.1}{2.2}-\frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}-\frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6}-\frac{1.1.1.3.3.5.5.7}{2.2.4.4.6.6.8.8}-$ etc. $=\frac{3}{4}.\frac{15}{16}.\frac{35}{36}.\frac{63}{64}.$ etc. $=\frac{2}{P}$ per ibidem ostensa. Est autem $\frac{P}{4}.\frac{2}{P}=\frac{1}{2}$: igitur et Productum earundem Serierum, quemadmodum enunciavi. Ex mea insuper Formulae *Binomii* consideratione illud facile demonstratur, quod prae ceteris legitur in Cousini *Lectionibus* (Cap. IV. P. I. pag. 122. 23.), scilicet, $(q+t)^m=q^m+mq^m\left(\frac{t}{q+t}\right)+$

$$\frac{m.m+1}{1\,.\,2}\,q^m\left(\frac{t}{q+t}\right)^2+\frac{m.m+1.m+2}{1\,.\,2\,.\,3}\,q^m\left(\frac{t}{q+t}\right)^3+\text{etc.}$$

(14) Nova haec Theoria legitur in X^{mo}. ac postremo Capite, et praesertim in §^{o}. 397mo. ad pag^{s}. 602. 3. Operis praedicti *Magnitudinum Exponentialium etc.* Eo solummodo rem perduxi, ut *Constans* ab aliis hactenus neglecta Calculo restitueretur. Quo facto est $\int\frac{dx}{x}=Lx+\infty^{\text{Harm.}}-Ln+C$ (ubi n ex hypothesi valorem significet variabilis x eo casu, quo $\int\frac{dx}{x}$ evanescit) $=L\left(\frac{x}{n}\right)+\infty^{\text{Harm.}}-\infty^{\text{Harm.}}=L\left(\frac{x}{n}\right)$. Ista *Constantis* omissio in vulgata methodo Analystarum origo et caussa fuit, propter quam integralia differentialium Logometricorum servitute Hyperbolae in antecessum liberari non potuerunt.

(15) Amicorum hortatu perantiquam Epistolam ad fidem autographi, invitus tamen, profero, quam mihi scripsit Romae die nona Maii an. M.DCC.LXXXIII^{i}. Franciscus Jacquierus e Minimorum familia SS^{mae}. Trinitatis in Monte Pincio. *Io amo troppo le Matematiche per non dare le ben meritate lodi all' eccellente e profonda Opera, colla quale VS. Illma. à arricchito le Scienze. Mi rallegro colla sua Patria, la quale, per mezzo suo, non solo mantiene, ma accresce l'antica e non più interrotta gloria in questo genere di studj. Io ho letto con somma attenzione diverse parti le più interessanti del suo Libro, che contiene molte cose nuove e sublimi. Io ammiro il suo talento, ed il suo ingegno inventore. Le scoperte, che io osservo nella sua Opera, daranno luogo ad altre bellissime invenzioni, delle quali la sua mente è fertilissima. Aspetto con impazienza le altre sue produzioni, le quali saranno nuove ricchezze nelle Matematiche, ed una conferma della somma venerazione ec. ec.* Virorum clarissimorum Sebastiani Canterzanii et Gregorii Fontanae Litteras humanissimas datas Bononiae et Papiae die 2^{a}. ac

3^{ia}. Fe-

3ⁱᵃ. Februarii eiusdem anni M.DCC.LXXXIIIⁱⁱ. praetermitto libenter, non secus atque Academiarum Londinensis, Mantuanae, Taurinensis, Palatinae-Rheni ad me missas vertentibus annis M.DCC.LXXXIIIᵗᵒ. LXXXIV°. et LXXXV°., meoque labori, quantuluscunque fuerit, satis abunde plaudentes. (Vide *Adnotationem* 184ᵗᵃᵐ. *Exercitationis*, quae sequitur, ubi altera recensetur in argumentum idem Epistola anni M.DCC.LXXXIᵐⁱ.). Quae dum procul dubio vanitatis notam praeseferunt, veniam precor si peculiari ratione permotus heic potius in vulgus edere, quam ut par erat ab eorum communicatione abstinere censuerim. Praeterquamquod „ negligere quid de se homines sentiant dissoluti est animi „. (Cic. de Offic.)

(16) Est Propositio 35ᵗᵃ. Libri IIIⁱ. Elementorum. (Vide Sectionem IIIᵗᵃᵐ. huius Exercitationis in §°. 65ᵗᵒ.).

(17) . . . . *Mentiri nescio: librum,*
Si malus est, nequeo laudare, et poscere.....
(Iuvenalis Satyra IIIᵗᵃ. v. 41 42.)

Adde quae docte Salmasio olim scripsit Huetius (*Dissertations sur la Relig. et la Philosoph.* T. II°. pᵃ. 444.). *Adversarium hunc, si tu me audias etc.* Consilium sane laudabile in eos, qui errorem passi atque moniti veritati potius, quam errori ferias dicere studeant. Discant aliquando homines isti quomodo sancte colenda sit veritas a familiari exemplo incomparabilis Leonardi Euleri, qui quum anno M.DCC.LXXIX°. consultus a me fuerit de quodam lapsu suae *Introductionis in Analysin Infinitorum*, Litteris (quas adservo) datis Petropoli Nonis Septembris non modo mecum consensit, verum etiam mihi humanissime gratias egit. (Pagᵃ. 577. Adnot. (*) et (**) Operis *Magnitudinum Exponentialium etc.*). Idem ab Alemberti comitate ac modestia exspectandum mihi equidem pollicebar dum huius *Exercitationis* §ᵘᵐ. 43ᵘᵐ. nondum

nondum e vivis ereptus perlegisset: idem a Cl. Gregorio Fontana pluries in commercio nostro epistolico expertus sum, et experturum confido a vere eruditis cordatisque omnibus viris, a quorum placitis inposterum urbanissime declinare mei muneris esse arbitrabor.

(18) Sunt profecto errorum nonnulli, quos reprehendere nefas esset. Idgenus menda aut typorum negligentia, aut Librorum editionis defectu, aut Operum recentiorum raritate, aut rerum sylvae iamdudum conditae minus recta fide, aut denique expressionis ambiguitate inducuntur: verum tametsi passim occurrant, nihilominus nec mentis lapsum, nec fallaciam doctrinae ostendere valent. Hoc exemplis domesticis comprobandum duco, ne forte molestiis in me agant ii, qui aliquando naevos detexerint nunc describendos. In meo MS. *Magnitudinum Exponentialium etc.* dum Koënigium memorabam, manu exaratum erat *Leibnitii successorem Maupertuisium*, loco *Leibnitium* ut in Opere legitur ad num^{um}. 320. in calce pag^{ae}. 468^{vae}. vel typographi vel typis adsistentium oscitationis ratione. Commata praeterea omissa in paucis ipsius Operis exemplaribus ad pag^{am}. XXXII^{am}. Prolegomenωn, et omissio litterae D′ seu puncti bisectionis rectae LD in Fig^{a}. 3^{ia}. Tab^{ae}. I^{ae}. dubium movebant an de harmonica potius, quam geometrica proportione sermo fieret. Identidem in Proleg^{nis}. pag^{a}. XVI^{ta}. v. 21. est Epocha M.DC.LVII. vice M.DC.XLVII., prouti recte scriptum in altera pag^{a}. 397ma. Praeterea ad pag. LIV^{tam}. omissà fuit alterius Operis Iacobi Gregoryi citatio, illius nimirum, cui titulus *Geometriae pars universalis*, et de quo mentio facta est in alia pag^{a}. 371^{a}. In *Prodromi* superius citati contextu (vid. Adnot. 1^{am}.) mea manu descripto loquebar de Calculo *Differentiarum partialium*, atque Functionibus *discontinuis*. Sed in citationibus, quae in calce sunt Adnotationis 17^{mae}. seu (*b*) ad pag^{am}. 137^{mam}., scriptum exstabat (*Ved^{ti}. il Tomo I^{o}.* Miscellanea Taurinensia *edito nel* 1759., *le Ricerche di M. D' Alembert*

ed Euler

ed Euler sulle Corde vibranti etc. etc. nell' Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin *per gli anni* 1747. 1748. e 1750., *le* Reflexions *del primo* sur la cause générale des Vents (1747.) *e l'*Essai d'une nouvelle Theorie sur la resistance des Fluides (1752.), *la* Memoria *di M. Cousin tra quelle della R. Accademia delle Scienze di Parigi del* 1772. *oltre l'altra di M. De Condorcet nel Volume del* 1770., *e quella di M. De La Place nel Tomo del* 1773., *la* Memoria XXV^{a}. *di M. D'Alembert nel Volume IV°. de' suoi Opuscoli, una di M. Monge nel T. V°. delle* Melanges *dell'Accademia Reale di Torino etc., la* Memoria *di quest' ultimo nel Tomo VII°. e la sottilissima* Dissertazione *di lui medesimo* sur les Fonctions arbitraires continues ou discontinues etc., *ch'è la III°. del Tomo IX°.* Mémoires de Mathématiques et de Physique présentés etc. par divers Savans (*da p°.* 345. *a* 381.) *pubblicato a Parigi nel* 1780. *etc.*). Antigrapharius prima forsan auctoritate contentus ceteras praetermisit, non secus atque in *Adnotatione* altera (*b*) ad pag^{am}. 160^{mam}. omiserat Cousinum, qui post Montuclam Galilaeo iniuria succensuit (pag^{is}. 348va. ac 361ma. Partis I^{ae}. *Leçons de Calcul différentiel et de Calcul Intégral*) de Brachistochrona et Catenaria. Seriem Iohannis Machinii pro Circuli dimensione semel atque iterum nunciavi tum in iisdem *Prolegomenis* (pag^{a}. LII^{a}.), tum in Capite VI°. (pag^{a}. 339.) mei Operis *Magnitudinum etc.* ad fidem *Synopsis Palmariorum Matheseos* in lucem editae a Wilhelmo Ionesio vertente anno M.DCC.VI°., ac praesertim quintae editionis Londinensis anni M.DCC.LXXII^{i}. *Sherwin's Mathematical Tables*. Nesciebam cum Montucla in pag^{is}. 159na. ac 160ma. *Histoire de la quadrature du Cercle etc.* illius demonstrationem Seriei fuisse, dum scripsi, iam typis vulgatam in Appendice Dissertationis *De signi negativi in Algebra usu* Francisci Maseresi Angli, atque in *Treatise on Mensuration* Caroli Huttoni, quum ea tempestate Florentinae omnes Bibliothecae carerent nuperrimis Voluminibus *Transactionum Philosophicarum*.

 Editio

Editio autem quinta Sherwini ita fallaciter Seriem exposuerat $\frac{16}{5} - \frac{4}{239} + \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{9^3} - \frac{4}{239^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{16}{55} - \frac{4}{239^5} + \text{etc.}$, in qua nec ordo, nec progressionis lex adparebant, pro valore Circumferentiae, supposita eius Diametro $= 1$. Postmodum igitur occasionem nactus pervolutandi Partem II^{am}, Voluminis LXVI^{ti}. *Transactionum* anni M.DCC.LXXVI^{i}., in lucem emissam sequente anno, non solum demonstratam facillime Seriem Machinii, sed etiam eius veram expositionem cognovi. Illa etenim Series est duabus ex partibus conflata, quarum altera primae subtrahatur, nimirum Circumferentia $=$

$$\left.\begin{array}{l} +4\left(4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \text{etc.}\right)\right) \\ -4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \text{etc.}\right) \end{array}\right\}, \text{ vel reductione facta,}$$

$$\text{Circumf}^{a}. = 1\left(\frac{16}{5} - \frac{4}{239}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5}\right) - \frac{1}{7}\left(\frac{16}{5^7} - \frac{4}{239^7}\right) +$$

etc., quae quantum aberret a Sherwiniana nemo non videt. Fundamentum vero Seriei est altera Series notissima Leibnitii $T - \frac{T^3}{3} + \frac{T^5}{5} - \frac{T^7}{7} + \text{etc.}$ Namque, si ponatur tangens $T = \frac{1}{5}$, et postea $= \frac{1}{239}$, et in mentem revocetur Octantem Circumferentiae peraequare differentiam inter quadruplum Arcus, cuius tangens $\frac{1}{5}$, et Arcum, cuius tangens $\frac{1}{239}$, Seriei veritas abunde patebit. Idem dicendum de aliis admodum convergentibus a Carolo Huttono datis in Epistola ad Horsleyum Regiae Societatis Londinensis a Secretis, quam Volumen illud complectitur, eademque ferme methodo Huttonus ipse exaravit a Leonardo Eulero adhibita usque ab anno M.DCC.XXXVII^{mo}. in Dissertatione *De variis modis Circuli quadraturam numeris proxime exprimendi* Voluminis IX^{i}. veterum *Commentariorum Academiae Petropolitanae*,

Ex

Ex dictis consequitur nec editionibus quidem Britannicis perpetuo fidendum esse, quamvis Glasguenses praesertim editiones Typographeii Fouillisiorum, Virgiliusque Birminghami impressus omnium eruditorum votis primas teneant in re libraria Transalpinorum. Eandem ob caussam, quum Opus meum scribens *Magnitudinum etc.* nihil aliud vidissem de egregio Theoremate $oLo=o$, aut $xLx=o$ dum x evanescat, sive, quod idem est, $oL\infty=o$, praeter conclusionem equidem perfunctoriam a Leonardo Eulero traditam in Parte I[a]. *Miscellaneorum Berolinensium* Continuationis VI[ae]. seu Voluminis VII[mi]. edita anno M.DCC.XLIII[io]. (pag[a]. 149. *etsi ergo* x *est infinitum, tamen eius logarithmus* lx *est ex minimo infinitorum ordine, hincque fit* $olx=o$), hoc argumentum tractavi in num[is]. 128. 129. ac pag[is]. 166. 68. Capitis IV[i]. nescius Eulerum ipsum longe fusius atque utilius rem omnem a fundamentis extulisse in pereximia Dissertatione Partis prioris *Actorum Academiae Petropolitanae Scientiarum* pro anno M.DCC.LXXVIII[vo]. edit. M.DCC.LXXX. (a pag[a]. 102[da]. usque ad 118[vam].), quae Dissertatio titulum habet *De infinities infinitis gradibus tam infinite-magnorum, quam infinite-parvorum*. Quantum haec doctrina profecerit a Guidone Grando, qui saeculo ipso ineunte (M.DCC.X.) scripsit Opellam cum titulo *Disquisitio Geometrica de Infinitis infinitorum et infinite parvorum ordinibus*, ad Eulerum usque, ne verbis quidem exprimi potest. Nonnullis fortasse obscura visa sunt quae de Hyperbola adnotavi uti Conchoide Trianguli in *Prolegomenis* antea dictis (pag[a]. XXXIII[a].), propterea quod Proportionis interpunctio proprietati Hyperbolae non semper respondeat in versu 26[to]. Hoc autem qui dixerint *aequalitatem perturbatam*, quae ibidem punctorum ope indicatur, non animadvertisse viderentur. Eadem *Prolegomena* una cum Alemberto decernunt (pag[a]. XXXVI[a]. et seqq.) relationem Exponentium duarum quarumvis Rationum toto caelo diversam esse a relatione Logarithmorum duorum Antecedentium, si Rationes

tiones ipsae, salva aequalitate, ad communem Consequentem reducantur. Censores quidam clandestini *emunctae naris* idgenus ratiocinationem non satis intellexerunt, perinde ac si sermo fuisset de sublimi Mathesi. Exemplo tamen facillimo res conficitur. Sint duo Rationes numeris expressae $m:1$, $n:1$. Indubium est earum Exponentes, vulgato sensu, esse m, n, dum contra Lm, Ln sunt in admodum discrepante Ratione. Diversi etenim Numeri nunquam sunt eorum Logarithmis proportionales. Qui autem Rationum Exponentes uti Indices Potestatum considerare voluerint, ita ut eâdem manente $m^1:1$, altera Ratio $n:1$ vertatur in $m^r:1$, tum, facto m Basi Systematis Logarithmici, $1:r$ foret in Proportione Logarithmorum pertinentium ad Numeros m, n vel Exponentes vulgatos Rationum datarum. Sed illa Exponentium consideratio ab Euclideis praeceptis aberrat. (Vid. *Encyclopediam* Parisiensem in Voc[bus]. *Raison, Exposant*). Aliis denique, qui Adnotationes eiusdem Operis in calce pag[rum]. 170. et 367. comparaverint cum Operibus ibidem citatis Wallisii ac Viviani, aqua haerebit ad significationem verborum non caute adtendentibus. Namque in earum postrema locum illum, ubi Vivianus laudavit Seriem Leibnitii, adpellavi *Isagogen*, scilicet Introductionem, tametsi locus ipse sit potius ad finem, quam ad initium Opusculi Vivianei *De Fornicibus*. Hoc sane eo animo scripsi tum quia Titulus a Viviano adpositus *Formazione e Misura di tutti i Cieli ec.*, tum quia argumenti rectus ordo expostulabat id primum esse, quod postremum legitur in Opusculo ab Auctore septuagenario in lucem emisso, quum prius de structura, ac deinceps de mensura Fornicum disserere oportuisset. Verba Wallisii sunt ea, quae transcribo. *Tota vero figura, quae contineri supponitur* (*aut supponi possit*) *quatuor convexis Hyperbolis* (*sibi mutuo, ut et asymptotis rectis, post infinitam distantiam concurrentibus*) *toti figurae Ellipticae respondet*, hoc autem discrimine, quod in Ellipsi quatuor partes sibi mutuo concavitatem obvertant et

se

se mutuo continuent, dum Hyperbolae coningatae convexitatem sibi obvertnnt, *neque suis asymptotis rectis, nisi post infinitam distantiam, occurrunt, aut occurrere supponuntur* (Prop. 43[ia]. *De Sectionibus Conicis nova methodo expositis* edit. M.DC.LV.). Quod in una Ellipseωs perimetro absurdum est, quum analogia, si quae sit, intercedat tantummodo binas inter Hyperbolas *coniugatas* et disiunctas, atque binas Ellipses *coniugatas*, forte fortuna sibi invicem congruentes, veluti iisdem litteris in Fig[a]. 4[ta]. exprimere studui. De qua geminatae Ellipseωs copulatione non ingrata alibi locutus sum in Adnotatione (211) II[dae]. Sectionis. (Vide in Volumine LV[o]. *Transactionum &c.* Londini editarnm an. M.DCC.LXVI[o]. Epistolam *Two Theorems &c.* Eduardi Waringii ad Carolum Mortonum Regiae Societatis Scientiarum).

(19) Mathematica recte scribere, riteque ad sensum auctorum intelligere, et dum argumenti ratio id expostulet interpretari, nemini nisi viro Mathematico datum est. Qninam etenim adprobare unquam posset dum perlegerit pag[a]. 86[a]. Voluminis I[i]. ita inscripti *Lettere sopra l' Inghilterra, Scozia, e Olanda*, ac Florentiae editi anno M.DCC.XC., *tutte le sue linee* (dell' Inglese) *e le rette e le oblique, tutte son quà rivolte* (all' Inghilterra), perinde ac si obliquae lineae lineis rectis aeque adnumerandae non essent (*Scilicet ut possem curvo dignoscere rectum* Horat. Epist. II[a]. Lib. II[i]. v. 44.)? In Elogio quodam Galilaei hi versus occurrunt „ *ineguale gravitazione dei corpi nei varj punti del nostro globo, quindi le congetture sulla figura di questo* (globo) „. Quam impropria, et in Mathematicis facultatibus peregrina sit haec expressio, humanioribus tantum litteris contenti satis noscere nequeunt. Coniecturam revera, aut quaestionem movere *de figura Globi* idem somnium esset ac de figura Trianguli, Circuli, Cubi etc. etc. Non ita si quaestio, aut coniectatio de figura Telluris, de figura Planetae, in quo sumus etc., expressa fuisset. Rursum idgenus dictio, quae legitur in Elogio Leopoldi Medi-

 ces

ces ab Etruria, *scioglier teoremi* soloecismus est in Mathesi. Elegantiarum harumce typis paratum elenchum habeo, nomine tamen Scriptorum, Operumque titulo detectis, ad hoc tantummodo consequendum quod citationum veritas pateat, mendaque castigata magis in aperto ponantur. Ex adverso Gabriel Cramerus, egregius Geometra, erudite docteque disseruit de Hippocrate Chio in *Commentariis* Berolinensis Academiae (a pag^{a}. 482da. usque ad 499^{nam}.) relatis ad annum M.DCC.XLVIII^{vum}., Bougainvillius de Pythea in Volumine XX^{mo}. Academiae Parisiensis *Inscriptionum*, *Litterarumque humaniorum*, Heinius de Anaxagora in Berolinensibus *Actis* annorum M.DCC.LII^{di}. ac LIII^{ii}. etc. etc. (Vide quoque *Adnotationem* 77^{mam}. sequentis *Exercitationis*).

(20) Ne monitum quidem *Dictionarii Encyclopaedici* in articulo *Cône etc.* satis fuit ad expellendum a Geometriae templo errorem perquam maximum, hac nostra praesertim aetate tot tantisque luminibus inclyta, Conum scilicet scalenum, non secus ac rectum, a revolutione Trianguli generari. Quis itaque Geometra sanae mentis immanis huiusce mendi scriptorem non redargueret in Romana editione an^{i}. M.DCC.LXX^{mi}. Operis Clementi XIV°. dicati, et ad Tirones in Architectura recte riteque instituendos conscripti, cuius titulus est *Il Vignola illustrato ec.*, dum pag^{a}. 4^{a}. Speciminis Geometriae non modo Conum, verum etiam Cylindrum obliquum rotatione Trianguli, et Parallelogrammatis genitos adfirmare audet, id fortasse adprobante Matheseos *sublimis et mixtae* publico Professore? Quis a Montucla non dissentiret semel ac viderit in pag^{a}. 634ta. I^{i}. Voluminis *Mathematum Historiae* nuncupatum inter antiquos Prospectivae scriptores *Pietro del Borgo San-Stephano en Italie*, ipsum nempe Petrum *della Francesca* de *Burgo* Sancti-Sepulcri (quem aliqui censent Biturgiam veterem in Etruria nova) laudatum, ut ille adserit, ab Ignatio Danto ex Dominicanorum familia, Pictorem sui temporis praestantissimum, pluribusque in Patria et per Italiam

liam totam pictis tabulis celeberrimum vertente saeculo XV°., Magistrum Lucae Paccioli Ordinis Minorum Sancti Francisci, de quo idem Montucla ad pag^{am}. 455^{iam}. iam scripserat esse de *Burgo* Sancti Sepulcri „ *parce qu'il étoit du Bourg du Saint Sépulcre en Italie* „ memoratumque non sine honore ab Equite Georgio Vasaro in *Pictorum vitis* (Tom°. I°. pag°. 260.), a Christiano Wolfio in Volumine V°. *Elementorum Matheseos*, a Cardinali Furietto in Opere notissimo *De Musivis*, aliisque sexcentis? Profecto Plebs Sancti Stephani, Portus Sancti Stephani etc., sed nunquam, quod sciam, *Burgus* Sancti Stephani in Geographia Italica occurrit.

(21) In Ο'δοιπορικων Collectione fideli enarratur Indiarum Orientalium Dynastam ita olim eloquentissime atque acutissime cum Famulo suo colloquutum esse de Philosophorum taedio avertendo. *Mon ami, ces gens là sont pernicieux. On ne peut se permettre la moindre injustice sans qu'ils la remarquent. C'est envain qu'un masque adroit dérobe notre vrai visage aux regards les plus perçans. Ces hommes en passant ont l'air de vous dire: Je te connois. Messieurs les philosophes, j'espere vous apprendre qu'il est dangereux de connoître un homme de ma sorte. Je ne veux pas être connu*. Testantur etiam Itineraria quamplurima Luciani Monumentum in Heliopoli aut Colonia Iulia Augusta Caelesyriae conlato ære concivium exstructum hanc insculptam epigraphen habuisse

ΦΟΒΟΣ ΚΑΙ ΕΛΕΟΣ.

Quid iste fert tumultus, aut quid omnium
Vultus in unum me truces?
. . . . *Namque in malos asperrimus*
Parata tollo cornua.

ΟΥ ΜΕΛΕΙ ΜΟΥ.

(Q. Horatii Flacci *Epodon* Ode V^{ta}. v. 3. 4., atque Ode VI^{ta}. v. 11. 12.)(Edit. Ven. 1549.).

Plurimas

Plurimas idgenus sententias adtulit et recensuit amplissime Robertus Woodius tam in Opere eximio, cui titulum fecit *The ruines of Palmyra, otherwise Tedmor, in the Desart*, editionis Londinensis anni M.DCC.LIII[ii]., quam in altero *Les Ruines de Balbec, autrement dite Heliopolis dans la Coelosyrie* anni M.DCC.LVII[mi]. Ceterum qui de Veritate etc. optime meriti fuerint Belisarii nunquam obliviscantur necesse est, nimirum, strenui illius exercituum ducis et Gothorum victoria inclyti animo semper intueantur calamitatem oportet a Marmontelio disertissime expressam, et a Van-dikio depictam arte adeo mirabili, ac pene divina, ut Belisarius ipse, oculis captus, stipemque rogans, videatur haec dicere Tabulam inspicientibus *Les hommes vraiment grands doivent faire des sacrifices de leur fortune, de la faveur des Grands, et même de la considération contemporaine*. (Consulantur *Histoire du Bas-Empire par M. Le Beau = Considérations sur les moeurs de ce siècle par M. Duclos*, et Tom. III[ii]. Operis a Grosleyo editi vertente anno M.DCC.LXXI[mo]. sub titulo *Londres* pag[a]. 22[da].).

(22) . . . . . *Vox, vox, praetereaque nihil*. In egregio Opere de mensura Baseos ad dimetiendum Meridiani Circuli Gradum prope Londinum, quod sub-manus habui nuperrime versum ex Anglico in sermonem Gallicum, et sic inscriptum *Description des Moyens employés pour mesurer la Base de Hounslow-Heath dans la Province de Middlesex publiée dans le Volume LXXVI. des Transactions Philosophiques par le Majeur Général William Roy „ a Paris M.DCC.LXXXVII. = par M. de Prony =*, Praefatio traductoris ad pag[am]. VIII[vam]. et Adnotationem (1) Beccariam Dominicanorum Ordinis nescio cuius (*le Pere Beccaria Chanoine-dominicain*) filium nuncupat, dum contra norunt omnes Clericum-regularem fuisse Scholarum-Piarum. Parvi hoc autem momenti aestimandum est, quum bonarum Artium, Scientiarumque Reipublicae nihil intersit cuinam Regularium Instituto Philosophus adscriptus

adscriptus fuerit. Eandem ob caussam qui Iosepho Pigro, in Mathesi adprime versato, quamplures errores (fortasse typographicos) obiiceret, tam occurrentes in Praefatione, quam in contextu sui Operis Arithmetici (*Nuove Tavole degli Elementi dei Numeri ec.*) Pisis in lucem emissi anno M.DCC.LVIII[vo]., frustra ei succensceret, pretiumque laboris, a Traytorensio et Fontenellio (*Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris etc. pour l'année M.DCC.XVII.*) admodum commendati, infirmare non potis esset. Biennio post evulgatam *Theoriam novam Magnitudinum Exponentialium etc.* Mathematicus quidam (non ultra Sauromatas) me monuit citavisse *Postuma* Ioannis Bernoullii, quasi nescivérim Collectioni huiusce Operum omnium Lausannae et Genevae editorum anno M.DCC.XLII[do]. superstitem fuisse Bernoullium, quippe initio anni M.DCC.XLVIII[vi]. e vivis ereptum, dum octuagesimum-primum aetatis annum agebat. Iterum iterumque meum Opus pervolutanti mihi occurrerunt in pag[is]. 337[a]. 353[ia]. 492[da]. *Anecdota* Ioannis Bernoullii, et in pag[a]. 27[a]. *Postuma* Fratris natu maioris Iacobi, quae revera publici iuris facta fuerunt ad calcem Voluminis II[i]. eius Operum anno M.DCC.XLIV[to]., recensente atque inlustrante Gabriele Cramero. Veruntamen si me fefellerit iterata pervolutatio, ac forte fortuna semel in tanta citationum copia *Postuma* Iacobi cum *Anecdotis* Ioannis permutasse mihi contigerit, quodnam Mathesi detrimentum adcessit?

(23) Si locutionis gratiam, si rerum dictarum ordinem, si cultum urbanumque scribendi stilum, perfectamque Logicam desideres, nullum Opus polemicum Galilaei celeberrimo *Trutinatori* comparandum (*Il Saggiatore*) Romae primum impresso vertente anno M.DC.XXIII[io]. in Horatium Grassium Iesuitam, meo saltem iudicio, hactenus novit Italia tota. Florida hic equidem omnia sunt, nativoque lepore et festivitate plaudenda. Non ita sentiendum de leviusculis illis scriptoribus, quorum cura fuerit invido morsu persequi nexus *tralla*, *tralloro ec.*, aliaque non

 absimilia,

absimilia, quae nauseam moveant. Quod eo magis etiam in re grammatica vituperandum censuerim quum Ioannis Lamii, sermonis Italici orthographiae peritissimi, auctoritate repelli facile possent. (*Charitonis et Hippophili Hodoeporici Par. I.* Florentiae M.DCC.XLI. in *Deliciis Eruditorum* pag[a]. 260. v. 3. 4. et rursus pag[a]. 284. v. 13., quarum primum Volumen lucem publicam vidit vertente anno M.DCC.XXXVI[to].

(24) Nihilo tamen minus *Hi motus animorum, atque haec certamina tanta Pulveris exigui iactu compressa quiescunt.* Bernardus Fontenellius a Boileavo acerrime accersitus, et ab Academia patriae linguae atque eloquentiae illius insidiis reiectus nunquam satyricis eius scriptis respondit, si quaedam excipiantur in Elogiis suis academicis Dangeavi et Valincourtii admodum levia, ac se pene invito exarata. Senecae de Philippo Macedonum Rege aurea exstat sententia „ *Si quae alia in Philippo virtus, fuit et contumeliarum patientia, ingens instrumentum ad tutelam regni* „. Eruditos honestosque decet viros exempla haec imitari: scriptores etenim omnes ab hac animi moderatione et tranquillitate declinantes nec doctrinarum robore, nec doctorum auctoritate castigari merentur (Vid. Adnot. praec. et Q. Hor. Flac. *De Arte poëtica* ad Pisones v. 282. 283. 330. 331.). Ad rem facit Liber cedro dignus Benedicti Menzini ad Franciscum Redium archiatrum *De literatorum hominum invidia* edit. an. M.DC.LXXV[i]. *Non equidem hoc studeo bullatis ut mihi nugis Pagina turgescat, dare pondus idonea fumo.* (Persius Satyra V[ta]. v. 19. 20.). *Ce n'est, en tout genre, que dans la médiocrité de ses talents qu'on trouve un azyle contre les poursuites des envieux.* (In Praefatione Operis *De l'Esprit* ad pag[am]. IV[tam]. editionis Parisiensis anni M.DCC.LVIII[vi].).

(25) Licuit, semperque licebit neque severius, neque temperantius aliorum inventa perpendere, et dubitationes exponere, si quae fuerint. Imitabile exemplum praebuit Cl. De-La Grange, qui omissas a Condorceto in Sectione II[da]. Partis I[mae]. *Cal-*

culi

culi Integralis nonnullas Integralium formas differentialibus Aequationibus respondentes iterum iterumque expertus Condorcetum ipsum amicissime ad eas supplendas excitavit atque perduxit, quemadmodum liquido constat ex Opusculo *Eclaircissement sur le Calcul Integral* Lutetiae Parisiorum impresso vertente anno M.DCC.LXVII^{mo}. Quum primum legerem Petropolitanae Academiae Collectionem in Volumine IX°. veterum *Commentariorum* alacri animo pervolutavi Friderici de Moula Dissertationem *De Maximis in Figuris rectilineis*. Praeterquamquod in re simplicissima neque Algebrae, neque Calculo infinite - parvorum locus erat, prouti inter alios ostendit Opusculum cedro dignum Thomae Simpsonii, non potui quin etiam cognoscerem et duo praesertim Lemmata (pag^a. 139^a.) et duo simul Theoremata (pag^a. 149^a.) elaboratis demonstrationibus Analyticis exornata nihil aliud esse nisi facillimas Geometriae Elementorum Propositiones. Unum etenim horumce Theorematum, ne de Lemmatibus loquar, est notissimum Ptolemaicum pertinens ad Quadrilatera Circulo inscripta: alterum autem novum de Quadrilateris ipsis sic breviter in Fig^a. 5ta. demonstro. Propter angulos BAC ac BDC, qui simul iuncti ex hypothesi duos rectos conficiunt, quod etiam valet de angulis ABD, ACD, atque ob oppositos angulos in E aequales, docet Euclides esse Triangula BAC+BDC:BDC::AD:DE::BA.AC+BD.DC:BD.DC, necnon ABD+ACD:ACD::BC:CE::BA.BD+AC.DC:AC.DC. Sed invicem comparatis geminis Proportionibus constat ex Theoremate elementari alia Proportio DE:CE::BD:AC = BD.DC:AC.DC. Ergo AD:BC::BA.AC+BD.DC:BA.BD+AC.DC, veluti Moula repertum habuit. Quod additamentum Theorematí vetustissimo Claudii Ptolemaei in Libro I°. *Almagesti* editionis Venetae M.D.XXVIII., aut Neapolitanae (M.DC.V. sub titulo *Claudii Ptolemaei Magnae Constructionis Liber primus cum Theonis Alexandrini Commentariis etc.*,) Ioannis Baptistae Porta ubi Theorema celeberrimum *maxi-*

mae superficiei Polygonorum et Polyhedrorum regularium inter isoperimetra primum occurrit a pag^a. 21^a. ad 33^{iam}. (Montucla in T. I^o. ad pag^{am}. 304^{tam}. editionis huiusce epocham haudquaquam cognovit), hac ratione demonstratum omnem rigorem servat Euclideum, nec Geometrico penori nomen potius Syntheseως, quam praesidium adferre censendum est, quemadmodum ex adverso contigisse mihi videtur constructionibus linearibus Problematum, quae exstant in pag^{is}. 217^a. et 218va. Dissertationis ceteroquin sagacissimae Condorceti *Essai d'une Méthode pour trouver les loix des Phénoménes d'aprés les observations* ad calcem Libri vere aurei sub titulo *Experiences sur la résistance des Fluides*, Parisiis editi anno M.DCC.LXXVII^{mo}. auctoribus Alemberto, Condorceto, et Bossuto, quum nihil aliud significent nisi Calculum ipsum Analyticum Figurarum veste decoratum. Eadem Condorceti Dissertatio me quoque dubium aliquot abhinc annis detinuit circa methodum ingeniosissimam resolutionis universalis ab eo traditae Aequationum gradus paris, quae vocantur *convertibiles*, ab illustri transfuga Gallo Abrahamo Moivreo in *Miscellaneis analyticis de Seriebus et Quadraturis* editis anno M.DCC.XXX^{mo}. iamdudum consideratarum sub forma $y^n + ny^{n-1} + my^{n-2} + \ldots\ldots + my^2 + ny + 1 = 0$. Namque praestantissimus Auctor ad hoc consequendum animadvertit τὸ y esse necessario tam $e^{F\sqrt{-1}}$, quam $e^{-F\sqrt{-1}}$, ideoque ad *Sinus* et *Cosinus* Angulorum referri. Revera nescire me fateor qua de caussa eodem fundamento posito non innitatur etiam altera hypothesis τῷ $y = e^F$, et $= e^{-F}$, quae ad *Cosinus* ac *Sinus analogos* Hyperbolicos ducit vel Angulorum ex Lamberti dictione *transcendentium* (426ta. *Nota*), ita ut Aequationes omnes *convertibiles* potiori iure dici debeant resolvendae ope Formulae generalioris, quae Thomae Simpsonio placuit (*Miscellaneou's Tracts „ London M.DCC.LVII.* „), nimirum $y = M^A = M^{-A}$, suppo-

supponendo τὸ $M = e$ aut $= e^{\sqrt{-1}}$. (Consulatur *Theoria nova Magnitudinum Exponentialium etc.* pag^{a}. 487ma. et seqq., ubi omnia profluunt a Formula Newtoniani Binomii, de quo generalissimam dudum vidi demonstrationem *posthumam* Io. Andreae Segneri in *Historia Berolinensis Academiae* a pag^{a}. 37ma. usque ad 42^{dam}. Voluminis ad annum relati M.DCC.LXXVII^{um}.). Imperitiae fortasse meae adscribenda est altera dubitatio in demonstrationem petitam ex vulgaribus Algebrae regulis ab eruditissimo Sebastiano Canterzano Bononiensis Scientiarum Instituti a Secretis, de forma, scilicet, $A \pm B\sqrt{-1}$ algebraicarum Quantitatum omnium *imaginariarum*. Is enim in Parte secunda Voluminis II^{i}. (pag. 720. et seqq.) *Actorum Societatis Italicae* primum statuit (§^{o}. 6°. pag. 726. 27.) Quantitatem radicalibus radicalium etc. utcunque involutam, ubi praeter magnitudines quasvis reales aliae quoquomodo exsistant reales per $\sqrt{-1}$ multiplicatae, reduci semper posse ad formam $A \pm B\sqrt{-1}$. Deinceps (§^{o}. 7°. p^{a}. 727.) ait *Ogni valore dell' incognita d' un' Equazione sarà sempre una quantità, o una formola, qualunque poi siane la forma, espressa in qualche maniera per le quantità cognite, o vogliam dire per li coefficienti de' termini dell' Equazione stessa*. Denique (§^{o}. 8vo. pag^{a}. 728.) principium hoc inconcussum universale ita circumscribitur, ut τὸ *qualunque poi siane la forma* Radicis $y = \frac{x}{\sqrt[2r(2m+1)]{-1}}$ in Aequatione gradus paris $2r(2m+1)$, nempe Quantitatis *utcunque datae* per s extremum Aequationis ipsius terminum, atque per alios terminorum coëfficientes, *involuti alcuni di questi in formole della forma* $A \pm B\sqrt{-1}$, revocetur ad formam in §^{o}. 6to. expressam, quae et minus universalis mihi videtur, dubiumque saltem haerentemque Lectorem linquit, nisi prius demonstretur cuiuslibet Aequationis Radices formam peculiarem *algebraicam* in eodem §^{o}, 6to. adsignatam inducere debere, quod meo saltem iudicio

 Canter-

Canterzanus non fecit in sua Lucubratione, de qua nunc agimus, sic inscripta *Dimostrazione della riducibilità d'ogni quantità immaginaria algebraica alla forma* $A \pm B\sqrt{-1}$, *adattata ad un Trattato elementare della natura delle Equazioni*. Hoc nequidem obtinetur (nimirum algebraice, universaliter, ac sine praesidio Functionum Circuli) a laboribus Alemberti in *Actis* Berolinensis Academiae ad annum M.DCC.XLVI[tum]., nec a studiis ceteroquin eximiis Leonardi Euleri in *Commentariorum* veterum Academiae Petropolitanae Volumine VI°. ad annum M.DCC.XXXII[um]., et in novorum IX°. ad annum M.DCC.LXII[um]., atque in Capite IX[no]. Voluminis I[i]. *Introductionis in Analysin Infinitorum*, neque ab huius Capitis Additamento, quod in elegantissima Commentatione *De Functionum algebraicarum integrarum Factoribus trinomialibus realibus* Franciscus Theodorus Aepinus protulit anno M.DCC.LX[mo]. aut LXI[mo], a pag. 181[ma]. usque ad 189[am]. in Tomo VIII[vo]. *Novorum Commentariorum* Academiae ipsius Petropolitanae. Plus aequo religiosus atque sollicitus mihi etiam videtur (iure dicam, an iniuria, nescio) summus profecto et in mathematicis disciplinis illustrandis versatissimus Antecessor Gregorius Fontana dum infirmat Theorema $e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\text{etc.}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\text{etc.}$ in pag[is]. 133[a]. 34[a]. 35[a]. 36[a]. Partis I[ae]. praecitati II[i]. Voluminis *Actorum* Societatis Italicae. Profecto Theorema istud ab Eulero evulgatum in Tomo IX°. veterum *Commentariorum* Academiae Petropolitanae pro anno M.DCC.XXXVII[mo]. (vid. Theorema 19[um]. (pag[g]. 187. 88.) Dissertationis, cuius titulus est *Variae observationes circa Series infinitas*), et a me postmodum in calce pag[ae]. 352[dae]. Operis *Magnitudinum Exponentialium etc.* iisdem pene Euleri verbis transcriptum, oritur ab alio equidem indubitato (Theorema 7[um]. Coroll. I. pag[a]. 174.) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\text{etc.} = \frac{2.3.5.7.11.13.\text{etc.}}{1.2.4.6.10.12.\text{etc.}} = L\infty$, supponendo

hoc

hoc $\infty = 1+1+1+1+1+1+1+1+$ etc. (Consulatur Dissertatio *De Infinito etc.* Lhuilierii Genevensis, praemio decorata die prima Iunii M.DCC.LXXXVI. ab Academia Scientiarum Berolinensi). Ex ista veritate consequitur altera τῷ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}$ $+$ etc. $=$ LL∞, quam tamen Aequationem, eâdem forma ac valore, et iisdem literis cum eruditissimo Gregorio Fontana, Eulerus ipse ita exposuerat et demonstraverat $A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+\frac{1}{5}E+\frac{1}{6}F+\frac{1}{7}G+$ etc. $=L(L(1+1+1+1+1+1+1+$ etc.$))$, addideratque esse τὸ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+$ etc. $(=A)$ *quasi* Logarithmum τῷ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+$ etc. $=\infty_{,}$; quod evincit fore etiam ad mentem Euleri et l. c. ab Eulero desumpti $e^{A}=e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\text{etc.}}$ $=$ *quasi* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+$ etc. ad hoc, ut conveniant inter se duo praedicta Theoremata. Prouti enim in Aequatione Logarithmica omnibus numeris absolutus valor est $A+n=L(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ $+$ etc.$)$, ubi $A=\infty_{,,}$, n finitus et admodum parvus, ita etiam in regressu ad Exponentiales omnibus numeris absolutus valor est $e^{A+n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+$ etc. non secus atque ad mentem Fontanae, quemadmodum recta iubet verborum Euleri significatio, et contractiones denotant vacuaque in Serici calce relicta. Scopus autem et argumentum, necnon sensus et consequentia (l. c.) illorum Theorematum non erant Aequatio perfecta atque numeris omnibus absoluta, sed potius demonstratio trium diversi generis Infinitorum ∞, $\infty_{,}$, $\infty_{,,}$, quae in aperto ponitur aut n in computationem veniat, aut n negligatur. Meditanti mihi scrupulum in tractatione Infiniti haud parum admirationi fuit doctissimum eundem Scriptorem in eodem Volumine Societatis Italicae (Lem-

(Lemma I^{um}. pag^{a}. 424ta.) disseruisse de Serie infinita $Cos. x + Cos. 2x + Cos. 3x + Cos. 4x + Cos. 5x +$ etc., eamque a se demonstratam supposuisse perfecte aequalem $-\frac{1}{2}$, quum omnibus notum sit, qui recte Infinitum versaverint, falsam hanc esse aequalitatem ab acutissimo La-Grangio in Theoria sonorum et chordarum vibrantium primum contemplatam (*Miscell. Taurin.* T. I. an^{i}. M.DCC.LIX^{i}.), et toto iure ac pro virili sua oppugnatam ab Alemberto, praesertim in *Memoria* I^{a}. Voluminis I^{i}. et XXV^{a}. Voluminis IV^{i}. *Opusculorum* (pag^{ii}. 156. 57. *Supplementi*), ubi futilitatem irridet Mathematici nescio cuius, qui Calculum *probabilium* ad Summae eius Seriei et *parallelae* Grandianae veritatem adserendam ausit experiri. Interea ad moderandum lectoris taedium libet illius animum hilarare oblata comparatione pag^{rum}. 344^{tae}. 372^{dae}. 374^{tae}. ac 390^{mae}. Capitis VI^{i}. Operis mei *Magnitudinum etc.*, ex qua recte inita fluit $2(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{etc.}) = \frac{2.3.5.7.11.13.17.\text{ etc.}}{1.2.4.6.10.12.16.\text{ etc.}}$, dum contra $2(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc.}) = \frac{2.3.5.7.11.13.17.\text{ etc.}}{1.4.4.8.12.12.16.\text{ etc.}}$, eodem manente Numeratore a numeris omnibus *primis* invicem multiplicatis conflato. Erit itaque $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{etc.} : 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc.} :: 1.4.4.8.12.12.16.\text{ etc.} : 1.2.4.6.10.12.16.\text{ etc.} = \infty : 1$; adeo ut haec duo Producta valoris infiniti Infinita tamen praebeant diversi ordinis atque speciei, *sive limites* sint Rationis quacumque *data* maioris ex parte Infiniti, veluti passim occurrunt Geometris ex parte Infinite-parvorum.

(26) Cicero *de Legibus* initio Libri II^{i}., ac *de Finibus* Libro V^{o}. Consulantur quoque duo Opera celeberrima ab Humio Anglice scripta *Essais moraux et politiques = Sur l'origine et les progrès des arts et des sciences, et sur le caractere des Nations*. Ceterum de mirabili exemplorum ac monumentorum in concives virtute atque efficacia

efficacia nemo dubitare umquam poterit, si forte excipiantur *Gens plus curieux de rescriptions pendant leur vie, que d'inscriptions après leur mort*, uti habet Aubigneus in *Appendice* ad Historiae suae duo prima Volumina.

(27) Narrant Alemberto adhuc puero philosophorum nomen pluries audienti curiositatem obvenisse petendi *Qu'est-ce qu'un Philosophe* mediis in nubibus haerens? responsumque habuisse *C'est un fou, qui se tourmente pendant sa vie, pour qu'on parle de lui lorsqu'il n'y sera plus*. (Vid. Historiam Academiae Scientiarum Parisinae pro anno M.DCC.LXXXIII^io^. ad pag^am^. 78^am^.). Nihilo tamen minus *Peritia mihi fit amor = Si vivo et valeo, suum est*.

(28) Eruditorum pene omnium paupertas, non modo Librorum collectioni, verum etiam saepenumero otio litterario procurando impar, ab humillimae in Proceres servitutis obsequiique defectu originem ducit, iuxta illud Romanorum *Toga rara*. Dum autem Libros memoro, bibliomaniam luxuriemque typographicam nunquam optasse fateor. Pretiosa haec etenim sunt, et potius in pinacothecam, quam bibliothecam immittenda. Profecto quaenam artis miracula ex Bodonianis praesertim typis prodire in dies non videmus? Quidnam Parmensi editione elegantius Poëticae Coronae (*Prose e Versi per onorare la memoria di Livia Doria Caraffa*) in lucem emissae vertentibus annis M.DCC.LXXXIV^to^., LXXXV^to^.? Quid dicam de geminis *Anacreontis* editionibus eiusdem temporis, labores Stephanorum, Tourneborum, Morelorum, Societatumque typographicarum Parisiensis et Londinensis, quarum postremae nuperrimum debemus Platonem Graeco-latinum, exsuperantibus? Quid de Kennikotti Angli maximae impensae herculeo molimine sacra Biblia ad MSS. Hebraicorum fidem, variantibus undique conlatis lectionibus, et Voluminibus totam per Europam quaesitis, restituendi?

(29) Siculorum veterum erat in ore, dum antiquo libertatis impetu rapiebantur, idgenus vanissima dictio de illius Insulae

cive „ *Nil maius generatur ipso*, *nec viget quidquam simile aut secundum*. „

(30) *La Geometria serve, se non altro, per misurare i goffi*. (Consulatur Opus vere ludicrum *Il Pecorone di Ser Giovanni Fiorentino* editionis Mediolanensis anni M.D.LXXXIV[ti].)

(31) Cum φιλελλήνῳ quodam fusius olim disceptavi de vera significatione Graeci verbi πόρος, quod ille censum et vectigalia interpretabatur, ideoque cum sensu confundebat alterius vocabuli δασμὸς, iniuria quidem ex auctoritate Xenophontis, Isocratis, atque Demostheuis. Revera πόρος idem est ac mutuatio, aut pecunia quaesita ab iis, qui tantummodo *tempus commodent*, aliudve idgenus remedium extremum pro salute tuenda Reipublicae. Haec prima fuerunt de Censu studiorum meorum rudimenta. Cetera iussu Principis in patriis grammatophylaciis adservantur. Eâdem de re epistolas scripsi, et accepi vicissim labente anno M.DCC. LXXXII[do]. a meritissimo publicae oeconomes cultore, olim Augusti Caesaris Domini mei a Consiliis sanctioribus.

(32) Plus aequo, uti arbitror, homines cruditi ...... *Ploravere suis non respondere favorem Speratum meritis* (Horat. Lib. II. Epist[a]. I[a]. ad Augustum v. 9. 10.). Namque nefas est viris doctis tot tantasque antiquorum sententias intermittere, aut perturbare, quot Horatius Flaccus, C. Velleius Paterculus, C. Cornelius Tacitus, Suetonius Tranquillus etc. amplissime collegerunt, et poëtica rhetoricave arte mirum in modum exhilararunt. Qui vero plura desideraverit de nobilissimo hoc argumento adeat Opusculum editum Neapoli anno M.DCC.LXXXIV[to]. „ *Memoria* „ *sulle strade pubbliche della Sicilia di Carmelo Guerra* „ cum epigraphe *Prius est esse quam esse talem*. Idcirco in ore Doctorum (quae nominis inclyti antiqua laus hodie saeculi vitio plebeculam sonat) est illud olim a Persio argute dictum (Satyra VI[a]. v. 57. 58. 59.) ......: *quaere ex me, quis mihi quartus Sit pater, haud prompte, dicam tamen: adde etiam unum, Unum etiam, terrae est iam filius*. (33)

(33) Neminem latet auctorem istum, primum omnium, Tractatum scripsisse *De Lineis quarti ordinis*=*in Memorabilibus* Regiae Scientiarum Academiae Parisinae ad annos M.DCC.XXX^{mum}., XXXI^{um}. relatis (a Pag^{a}. 158va. usque ad 217^{mam}. et rursum a 363^{ia}. ad 434^{tam}. in Voluminum primo, atque in altero a pag. 10ma. ad 50^{mam}.). Fundamenta doctrinae heic iecit Bragelongnus tribus partibus Sectionis I^{ae}. Academia Scientiarum Parisiensis ulterius progredi pollicita fuit pag^{a}. 70ma. *Historiae* suae in Volumine anni sequentis M.DCC.XXXII^{di}. At nihil amplius usque ad hoc aevum de Cl. illius Auctoris laboribus lucem publicam vidit.

(34) *Nullius in verba*=Societatis Scientiarum, quae Londini est, celeberrima inscriptio. Eodem redit Numisma Alamanni Rinuccini Cl. Ferdinando Fossio editore atque interprete.

(35) Qui errores doctissimorum hominum emendare curaverint illud semper cordi habeant Newtoni effatum *Ut omnia candide legantur, et defectus in materia tam difficili non tam reprehendantur, quam novis lectorum conatibus investigentur et benigne suppleantur, enixe rogo.* (Vide Praefationis calcem in I^{a}. editione *Principiorum Mathematicorum Philosophiae Naturalis*).

(36) In vetustissimo Codice papyraceo Bibliothecae Palmyrenae Opus exstabat, id testante Longino rhetore, Zenobiae Reginae Administro et ab Epistolis latinis, olim Fabio Maximo consecratum, atque ita inscriptum *De methodo curandi morbos expectatione*.

(37) Fasciculus praelo paratus sigilloque munitus titulum habet *Quanto sia difficile e delicata l'applicazione delle Matematiche pure alla Fisica*, et epigraphen a Satyra VII^{a}. Iuvenalis desumptam (v. 51. 52.)......: *tenet insanabile multos Scribendi cacoëthes, et aegro in corde senescit*.

(38) *Si non à la mesure des choses, au moins à la mesure de ma vue*. (Montaign. *Essais* I^{ae}. editionis M.D.LXXX. Lib. II°. Cap. X^{mo}.).

(39) *La grandeur est...... une cause universelle de plaisir* (a). *Tout ce qui est grande a droit de plaire aux yeux & à l'imagination des hommes*. (T. I. *De l'Esprit* ad pag^a. 239. 240. 241. Edit. Paris. an^i. M.DCC.LVIII^vi.). Qui Londini sunt rarissimam illam diem, qua Solem extra nebulam nubesve splendentem adspiciunt, summo gaudio perculsi *glorious day* nuncupare solent. Idem arbitror de Veritate, semel ac densam errorum caliginem dimovere possit, ferendum esse iudicium. Nihilo tamen minus colenda viriliter atque servanda Veritas, propterea quod VIRTVS semper EGREDITVR VICTRIX, ut legi in Numismate celebri Friderici III^ii. Borussorum Regis, Berolini cuso, aut cudendo, vertente anno M.DCC.XLV^to. (*Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin = Année M.DCC.XLVI.*, et rursum *Histoire etc. depuis son origine jusqu'à présent = a Berlin M.DCC.LII.* in Tabula II^da.), quo praestantissima laborum Herculis Centauromachia ad vivum expressa fuit.

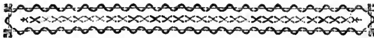
EXER-

EXERCITATIO
MATHEMATICA.

Πεῖναν διδάσκει, καὶ μαθητὰς λαμβάνει.

Esurire docebant, et discipulos habebant.

(*Diog. Laërt. Lib°. VII°.*)



DISQVISITIO
DE VERA FVNCTIONVM DIFFERENTIALIVM ORIGINE QVARVM INTEGRALIA A RECTIFICATIONE PENDENT ARCVVM ELLIPSEOS ET HYPERBOLÆ APOLLONIANÆ.





Blasivs Pascalius, vir equidem summus, et ingenii acumine Mathematicorum sui temporis nulli secundus, usque ab incunabulis Geometriae Limitum (1) auctor fuit celeberrimi huiusce Theorematis, videlicet, Summam rectarum innumerarum, quae a puncto ubilibet posito (si centrum et infinitum excipias) extra vel intra Circulum ad eius circumferentiam ducantur, aequalem esse Superficiei Cylindri circularis obliqui sive *scaleni*, ex dato puncti situ facillime determinandi. Theorema istud elegantissimum eo redit quod summa praedicta ab Ellipseos Conicae vulgaris perimetro derivetur, tametsi Andreas Tacquetus Iesuita *Geometriam practicam* scribens non viderit Cylindri *scaleni* Superficiem eandem esse cum Superficie Cylindri elliptici (2), nimirum utramque ab Ellipseos rectificatione, seu ut Graeci dicebant ἐξευθυνσει pendere. Neque hoc idem sensisse videntur Aegidius Personnerus Robervallius et Iesuita alter Antonius Lalovera, utpote qui praeclara inventi ante omnes in *Tractatu de Indivisibilibus* (3), ac in *Veterum Geometria promota* etc. (4) de Figuris Cyclocylindricis istas plerumque pares demonstraverint Superficiei Cylindri *scaleni*, sed nullam mentionem inierint complanationis (5), nec mensurae eiusdem Superficiei ope Ellipseos ab antiquioribus Geometris contemplatae. Quod sane miraculo proximum iure censuit Georgius Krafftius in Volumine XIV°. veterum *Commentariorum Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* de Superficie Cylindri et Coni *scalenorum* disserens (6),

quum iamdiu notissimum fuerit ex Sereno Antissensi (7) Cylindrum circularem *scalenum* a plano sectum lateribus et axi quomodolibet occurrente, ideoque et ad normam posito, Ellipsin Apolloníanam suppeditare.

In eo tamen Krafftius erravit quod inter superioris aevi Geometras, qui non animadverterint cognationem Superficiei Cylindri *scaleni* et Ellipseos conicae perimetri, nec unum Pascalium exceperit (8). Iniuria equidem, quum in Epistola sub ficto nomine Dettonvillii ad Christianum Hugenium (9) de omnigenarum Cycloidum, quae a Circuli revolutione nascantur, perimetris agens, earum non modo dimensionem, vel protractae, vel contractae forent, a Superficie Cylindri obliqui derivaverit, verum autem ostenderit apertissime cuinam Ellipseos datae arcui Cycloidales ipsae perimetri, aut illarum quaecunque partes, sint longitudine aequales (10). Quin etiam in eâdem Epistola Pascalius monuit ideo perimetrum Semicycloidis primariae (11) parem esse iuxta Christophorum Wrennum (12) duplo diametri Circuli genitoris, quia Ellipsis illa, tum evanescente Axe coniugato, se vertat adamussim in duplum Axeos transversi, aequalis eo casu diametro generatoris,

Hoc dictum sit non ut Krafftium plus aequo redarguam, nec novae particulam laudis accedere censeam Pascalio, de omni re litteraria tam optime merito, ut nullum ei par elogium (13), sed ad supplendam tantummodo *Historiam Mathematum* a Montucla traditam ubi memorans Pascalii inventum de Cycloidum *secundariarum* rectificatione silentio praeterit Theorema ingeniosissimum universale, a quo ipsa dimanet, et Superficiem Cylindri *scaleni* (14). Quod silentium quanta venia dignum existimassem si quaestio moveretur de omissa a Montucla inter Robervallii reperta Superficiei Coni *scaleni* mensura (15), quum deperdita fuerit, et fidei solum auctoris consignata fatente Leibnitio (16), tanto magis reprehendendum putem in Scriptore historico dum loquitur de Theoremate Pascalii Insulas Britannicas, Leodium, atque alibi misso, et a Robervallio, Petro Fermatio, ac Renato Francisco Slusio, Geometris illius aetatis eruditissimis, labente anno M.DC.LVIII. magna cum admiratione recepto (17).

Quidquid autem fuerit de minus nota, aut neglecta Pascalii doctrina in argumento pertractando Cycloidum omnimodarum, eam multis abhinc annis prae oculis habens statim cognovi fontem esse geometricum, a quo sponte fluant Integralia, quae ad rectificationem Ellipseos et Hyperbolae

perbolae referantur. Fundamentum igitur Integralium, quae Iulius Carolus Fagnanus primus omnium exhibuit ad rectificandam Lemniscatam Iacobi et Iohannis Bernoullii (18), eorumque a Colino Maclaurino (19), Iohanne Alemberto (20), Vincentio Riccato (21), Leonardo Eulero, Andrea Lexellio (22), et Iohanne Francisco Malfatto (23) nuperrime pervulgatorum in uno Theoremate Pascalii positum est, et adeo positum, ut dum universa haec Theoria fundamento illo deficiente contortis saepe methodis, et obliquis *substitutionibus* innitatur, fundamento tamen suo superstructa nativum ordinem servet, mirumque nitorem praeseferat, ac venustatem. Nec me pudet quae ocyus inveneram, serius admodum, quam par erat, litterariae Reipublicae consecrare. Primum etenim occurrit quod natura sim facilis ad meditandum, sed ad gloriam scribendo aucupandam difficilis, schedarumque potius mearum contemptor, et uno verbo *κακιζότεχνος*: deindeque tanta menti obversabatur argumenti huiusce foecunditas, et elegantia, tanta rerum dicendarum copia, ut paucis horis subcesivis, quibus adversaria mea perscrutari, et vacare Mathesi datum est, frequentissime manum operi admovere vellem, haudquaquam possem. Praecipue enim intererat obsoletas non solum et prolixas demonstrationes a Pascalio datas, nonnullasve deperditas restituere, aut novo ordine concinnare, verum etiam non pauca addere de Cylindris rectis et obliquis, de Cylindrorum et Conorum analogia, de Cyclocylindricis, de Linearum Persei quibusdam (24), de Curvis in re mathematica elegantioribus, de Conicis Sectionibus, de Magnitudinum finitarum Limitibus, de Ellipsium perimetro, aliisque, propter argumenti similitudinem, aut ad Syntheseos Infinite-parvorum pomoeria promovenda, quae sub caelo Italico Britannicoque sunt admodum in deliciis (25).

SECTIO I.

IN QVA BREVITER AC DILVCIDE DEMONSTRATVR

THEOREMA PASCALI

CVM ALIIS ADFINIBVS IN IPSIVS THEOREMATIS ORNAMENTVM.

1. Ea est cuiuscunque Cylindri *scaleni* singularis affectio, ut innumera huius latera, utpote axi parallela, aequaliter inclinentur ad planum Basis, efficiantque angulum inclinationis aequalem illi ab utroque laterum in Plano ad Basim normali positorum cum communi ipsius Plani et Baseos sectione efformato. Sit itaque (Fig. 6.) Cylinder *scalenus* cuiuslibet speciei et magnitudinis $ACELBDFM$, eiusque Superficiei quadrans $AGCBHD$, initio sumpto a Plano $AEFB$ ad Basim normali. Elementum Superficiei cylindricae circularis *scalenae*, sive, quod eo redit, ellipticae *rectae*, erit area Parallelogrammuli $GHKI$. Eductis itaque a B, H perpendicularibus ad Planum Basis BO, HP, erit ex praemissis GP constans et aequalis AO. Ducta vero PQ normali ad Tangentem Baseos GIC, Elementa docent fore HQ altitudinem Parallelogrammuli $GHKI$, cuius area $= GI.HQ$, sive $= GI(\sqrt{HG^2 - GQ^2})$, aut (ob Triangula similia orthogonia PGQ, NGR) $= GI(\sqrt{HG^2 - \frac{GP^2.GR^2}{GN^2}}) = SV(\sqrt{HG^2 - \frac{GP^2.AS^2}{GN^2}})$ si describatur radio Baseos AN uti diametro Circulus $AVNU$, ac demum $= SV(\sqrt{HG^2 - \frac{AO^2.AN.AT}{AN^2}})$, posita ST ad normam diametri, $= SV(\sqrt{BO^2 + AO^2 - \frac{AO^2.AT}{AN}})$.

2. Nunc assumatur in diametro AN, vel in ipsa quomodocumque producta punctum ubilibet X, a quo veluti *foco* seu *umbilico* ducantur rectae ad totam Peripheriam $AVNU$, quarum una XS. Habemus ab Euclide $XS = \sqrt{XN^2 + NS^2 + 2XN.NT} = \sqrt{XN^2 + 2ZN.NT + 2XN.NT}$, dummodo Z sit Centrum memoratae Peripheriae, $= \sqrt{XN^2 + 2XZ(AN - AT)} = \sqrt{XN^2 + 2XZ.AN - 2XZ.AT}$. Quod idem est ac si dicam more Pascalii elementum Summae a *foco* X digredientium innumerarum rectarum esse $SV(\sqrt{XN^2 + 2XZ.AN - 2XZ.AT})$.

3. Igi-

3. Igitur $\int SV(\sqrt{XN^2+2XZ.AN-2XZ.AT}) = \int SV(\sqrt{BO^2+AO^2-\frac{AO^2.AT}{AN}})$ sive $=$ utrilibet medietatum integrae superficiei Cylindri *scaleni* a Plano $CDML$, per Axem NY Diametrumque Baseos CL perpendicularem alteri AE transeunte, sectarum, dum fuerit altitudo Cylindri $BO = XN$, et $AO = \sqrt{2XZ.AN}$; quarum *conditionum* prima altitudinem Cylindri quaesiti determinat, secunda obliquitatem, duoque simul latus vel axem YN aut $BA = \sqrt{BO^2+AO^2} = \sqrt{XN^2+2XZ.AN} = \sqrt{XA^2} = XA$ ex Elementis. Exinde nascitur constructio perquamfacillima, et elegans, quum rectarum a *foco* maxima XA latus, minima XN altitudinem Cylindri praebeat, atque AO^2 sit $= XA^2 - XN^2$. Descripto autem Circulo diametri XA, etaCentro Z minoris Circuli dati educta ad diametrum ipsam normali $Z\Gamma$, erit $AO = 2Z\Gamma$, quum sit $AO = \sqrt{4XZ.AZ} = \sqrt{4.Z\Gamma^2} = 2Z\Gamma$. Nec modo Summa rectarum sine numero a *foco* X emissarum, et in infinite-parvos arcus SV ductarum par est semissi Superficiei Cylindricae determinatae $CALMDB$, verum etiam illius quaelibet partes huius homologis et proportionalibus partibus peraequantur; adeo, ut emissa quacumque rectarum XS, iunctaque NS, ac producta usque ad G, latus Cylindri GH secet Superficiem Cylindricam in duas partes $BAGH$, $GHCD$, quarum prima par sit Summae rectarum a *foco* X quo ad Arcum AS, et altera residuae Summae quo ad Arcum SN. Idem intelligendum si partes aequales et proportionaliter sectae non a puncto A, et latere AB, sed potius a puncto N, seu lateribus ML, CD numerentur.

4. Hemicylindro autem secto ope Plani ad axem NY sive lateribus AB, LM etc. perpendicularis, enascitur Semiellipsis conica $\Delta\Pi\Lambda\Theta$, cuius maior Axis $\Delta\Theta = CL = 2AN$, et Axis minoris dimidium $\Phi\Lambda = \frac{XN}{XA}.AN$. Nam educta $\Phi\Upsilon$ parallela NA, similia sunt Triangula orthogonia $\Upsilon\Phi\Lambda$, ABO, ideoque $\Upsilon\Phi$ seu $AN:\Phi\Lambda :: AB:BO :: XA:XN$ ex demonstratis in §. 3°. Huius Semiellipseos perimeter, eiusque quaelibet partes in latus constans AB, aut axem NY ductae hemicylindricam Superficiem *scalenam*, eiusque partes dimetiuntur atque complanant; unde fit Summam rectarum XS a *foco* X in arculos SV, eiusque quaelibet partes, Rectangulo AB sive $XA.\Delta\Pi\Lambda\Theta$, eiusque homologis partibus aequales esse. Caussa exempli Summa rectarum ab XA usque ad XS ductarum in arcus infinite-parvos

ab

ab A ad $S = XA.\Lambda\Pi$; Summa ab $XN = XA.\Pi\Delta$; et sic de ceteris in infinitum. Quapropter Summa praedicta, quomodocumque in partes divisa, dependet a rectificatione Arcus Ellipseos Apollonianae, magnitudinis et speciei datae. Quod in epilogi formam prae oculis ponendum, graphiceque explicandum censeo perquamfacillima constructione (26).

5. Data sit Circuli circumferentia $ABCD$ in arcus aequales sine numero divisa, et innumera divisionis puncta rectis a dato puncto X emissis iungantur (Fig. 7). Per centrum E ducatur recta $XAEC$, et a punctis extremis diametri AC normales seu tangentes CY, AG. Secetur $CH = CA$ diametro Circuli dati, et coniuncta recta XH, describatur Semiaxe transverso $CH = CA = CK$, et Semiaxe coniugato $AL = AI$ Ellipseos conicae medietas MLN. Erit Summa rectarum ab X in circulares arcus interpositos infinitesimos, qui totam simul concludunt Peripheriam $ABCD$, aequalis Rectangulo rectae maximae XC in perimetrum Hemiellipsis NLM. Et circumscripto Semicirculo NCM, ductaque a puncto A qualibet Chorda AS in circulo dato, ac protracta usque ad concursum T, si ab hac Radii extremitate emittatur TF normalis diametro MN, quae secet in O perimetrum Semiellipseos, erit Summa rectarum in arculos etc., initio sumpto ab XA usque ad XS, aequalis Rectangulo $XC.NO$; ita ut sit Summa ista partialis ad integram in ratione Arcus $NO : NOLM$; et sic de ceteris partibus in infinitum sibi proportionaliter respondentibus, aut in quacumque determinata ratione secandis (27).

6. Dum autem libeat Summam toties citatam Rectangulo eiusdem Rectae XC in perimetrum integrae Ellipseos aequalem adsignare, palam fit istud consequi bisectis in P, Q Semiaxibus datis AM, AL Ellipseos superius contemplatae, descriptaque *simili* Ellipsi $PQRV$. Est enim, ex Curvarum eiusdem familiae similitudine, perimeter $NLM = 2RQP = RQPVR$. Quinimo Ellipsis ipsamet minor non modo suppeditat integram Summam etc. $= XC.RQPVR$, verum etiam quamlibuerit eius Summae partem ab XA ad XS aequalem Rectangulo $XC.ZRY$, qui Arcus ZRY determinetur ducta primum Recta AO, ac deinde Chorda ZY parallela Tangenti Ellipseos in R, vel N, sive perpendiculari ad maiorem Axem PR. Nemo etenim non videt per Theoriam Conicorum, et Curvarum omnium similium, esse Arcum $NO = 2RZ = ZRY$, ideoque $XC.NO = XC.ZRY$; atque ita de ceteris sine limite (28).

7. Variatio

7. Variatio distantiae *foci* X a centro Z Circuli dati (Fig. 6.) argumentum suppeditat elegantiae plenissimum, quod aliquantisper contemplari non ingratum erit Geometris. Basis omnium Cylindrorum variabilium variato situ *foci* X constans est, utpote quae radium habeat NA aequalem duplo radii ZA Circuli dati. Obliquitas vero cuiusque Cylindri, eiusque Latus vel Axis variabiles sunt ea lege, ut $BA = YN = XA$, et Sinus anguli $BAO = YNE = \frac{XN}{XA}$. Supposito igitur *foco* X in infinitum distante a dato Circulo $AUNV$, Cylinder fit infinite-longus, sed rectus, quum eo casu $\frac{XN}{XA}$ sit ratio aequalitatis. Dum *focus* X ex infinito procedens accedat ad E, obliquitas semper augetur, fitque angulus $BAO = 45°$, sive semirectus, quando sit *focus* in X', et $AX' : X'N$ ut diagonalis ad latus Quadrati. Fit angulus idem $BAO = 30°$ *foco* X transeunte in E. Deinceps progrediente *foco* ab E versus N, obliquitas crescit, fitque maxima in N, ubi angulus BAO in nihilum abit, et Semisuperficies Cylindrica in Planum vertitur formam habens parallelogrammi mixti $LACD'NM'$, aequalis duplo Quadrati rectae NY', sive diametri AN Circuli dati (29). Quo in casu praecipue adnotandum partem quamlibet Summae rectarum ex *foco* N in arculos, uti ab A ad S', aequalem esse homologae parti Parallelographi, nimirum $A\Omega\Xi N = N\beta\mu Y' = NA \,.\, \Omega\Sigma = NA \,.\, AS'$. Absumptis gradibus omnibus obliquitatis Cylindri in progressu *foci* X, X', etc. extra Circulum, denuo incipit homologa obliquitatum series procedente *foco* a puncto N usque ad Z Centrum eiusdem Circuli dati $AUNV$. Consultis etenim formulis universalibus §. 3^{ii}., si *focus* in puncto X'' statuatur, erit semper AX'' latus seu axis Cylindri *scaleni*, qui gaudeat angulo obliquitatis Sinum-rectum habentis $= \frac{X''N}{X''A}$, et cuius Superficiei dimidium (exsistente eâdem Basi $ELAC$) adaequet Summam rectarum innumerarum XS'', etc. a puncto X'' intra Circulum veluti *foco* digredientium, et in solitos arcus SV infinite parvos ductarum. Iidem obliquitatis gradus, qui amplissimo limiti conveniunt a *foco* X infinities remoto usque ad punctum N, conveniunt etiam limiti arctissimo a puncto eodem N usque ad Centrum Z, sed ordine inverso. Et ea quidem lege, ut dato quolibet puncto seu *foco* X''' inter N ac Z, si in protracta diametro assumatur post Rectas AX''', AN tertia AX^{v} harmonice proportionalis (30), futura semper sit

obliquitas

obliquitas Cylindri respondens interiori *foco* X'' eadem ac illa respondens X^{iv} *foco* exteriori. Habetur enim propter harmonicam proportionem $\frac{X'''N}{X'''A} = \frac{X^{iv}N}{X^{iv}A} =$ Sinui obliquitatis in utroque Cylindro. Summa itaque rectarum $X^{iv}S$ per arculos quo ad exteriorem *focum* X^{iv} ad Summam rectarum $X'''S$ per arculos etc. quo ad *focum* interiorem X''' erit ut latus vel axis unius Cylindri $X^{iv}A$ ad latus vel axem alterius $X'''A$, sive in ratione rectarum *maximarum* $X^{iv}A : X'''A$; aut ex proportione harmonica *minimarum* $X^{iv}N : X''N$, sive, ex notissimo Galilaei Problemate, cuiuslibet $X^{iv}S : X'''S$, vel $ZX^{iv} : ZN$, aut $ZN : ZX''$, quod est unum Pascalii Theorematum (31). *Foco* denique X'' cadente in centro Z, Cylinder evadit *rectus*, fitque Summa radiorum in arculos datae Peripheriae aequalis Semissi Superficiei Cylindricae *rectae*, cuius basis Semicircumferentia LAC, latus seu axis AZ, vel integrae Superficiei *recti* Cylindri basim habentis $AUNV$, et altitudinem AZ; quod etiam Elementa suadent. Si *focus* X^{v}, $X^{v\prime}$, etc. ex altera centri parte progrediatur, Superficies Cylindrica denuo in *scalenam* se vertit, eodem modo et ordine renascentibus obliquitatis gradibus tam intra, quam extra Circulum datum, sed inverse consideratis rectis $X^{v}N$, $X^{v}A$ etc. etc., nec *negativis* ad morem Analystarum, aut *positivis* angulis separatim animadversis (32).

8. Consensu vere admirando cum anteactis speculationibus prospectus idem, sed iucundior, renovatur in Ellipsibus Superficies illas Cylindricas repraesentantibus (Fig. 7.). Et primum occurrit notandum Ellipses omnes sine numero, variato puncti X situ, per universos possibiles *specierum* gradus transire, unumque semper *axem* datum MN, aut PR communem habere. Dum X infinities recedat a centro E dati Circuli, in aperto est punctum intersectionis I confundi cum M, et ideo Hemiellipsin MLN eandem esse cum Semicirculo circumscripto MCN, Ellipsinque $PQRV$ cum Circulo $P\Theta R\Phi$ sibi pariter circumscripto. Promoto puncto X, X', etc. versus A, diminuitur continuo tam Semiaxis Coniugatus AI, AI', etc. Semiellipsis inscriptae, quam Axis pariter Coniugatus Ellipsis integrae similis, donec in A, ob rectam IIA, Semiaxis et Axis Coniugati evanescant, et ideo Semiellipseos MLN perimeter in Axem Transversum convertatur, sive in rectam lineam $MN = 2CA$, Ellipseosque similis $PQRV$ in $2PR = MN = 2CA$, uti superius, vel duplo diametri Circuli dati. Ex quo sponte fluit $\int AS$ etc. $= CA$.

$= CA.2CA = 2CA^2$, sive duplo Quadrati diametri Circuli $ABCD$, uti innuimus §. 7°. Inter A et Centrum E selecto quolibet puncto X'', ductaque recta $HX''I''$, fit AI'' Semiaxis Coniugatus Ellipseos eodem manente Transverso Axe $MN = 2CA$, qui Semiaxis a nihilo incipiens in A semper augetur procedente X'' versus E, et in E fit aequalis AN sive CA, ubi Semiellipsis in Aequilateram aut Semicirculum abit. Quae Semiellipsium (et ideo integrarum etiam Ellipsium *similium* communi Axe Transverso $PR = AC$ gaudentium) nova Series in intervallo AE Radii Circuli dati *homologe* repetit Seriem alteram antea explicatam in immenso intervallo puncti X ex Infinito prodeuntis usque ad A, sed ordine inverso (33). Constat etenim Semiellipses, Ellipsesque, easdem tum esse pro puncto exteriore X', et interiore X'', quum $AI' = AI''$, sive quum $CX' : X'A :: CX'' : X''A$, scilicet, quum $CX', X''X', AX'$ sint in harmonica proportione, quod ex Elementis eodem redit ac esse in proportione harmonica $X'C$, $AC, X''C$, et in geometrica $EX'' : EA : EX' \div$ (34). In hac autem constructione commodum perquammaxime et elegans accidit quod traiecto a puncto X Centro E nulla obstet impossibilitas (35), nec desinat Semiellipsium aut Ellipsium continua progressio. Hoc tantum discrimine quod Semiellipses Semicirculum MCN, Ellipsesque Circulum $P\Theta R\Phi = ABCD$ Circulo dato, non amplius circumscriptum, sed inscriptum habeant. Posito namque inter E et C puncto X''', et emissa recta $HX'''I'''$, erit $AM = CA$ Semiaxis minor seu Coniugatus *constans* novae huiusce cuiuslibet Semiellipseos, eritque Semiaxis Transversus sive maior *variabilis* $= AI'''$; quod ipsum etiam contingit similibus Ellipsibus integris, sumendo dictorum Semiaxium dimidia. Semiellipsis itaque $N\Delta M$ et Ellipsis tota $R\Lambda P\Xi$ conveniunt puncto X''', atque adeo conveniunt, ut suppositis punctis X''', X'' aequidistantibus a Centro E, sit Semiellipsis $N\Delta M$ *similis* Semiellipsi NLM, sed inversim descripta., quod etiam de Ellipsibus integris $R\Lambda P\Xi$, $RQPV$ sentiendum est. In ea quippe hypothesi consequimur proportiones $A\Lambda : AM = AI''' : CH :: AX''' : CX''' = CX'' : AX'' :: CH : AI'' = AM : AL$. Tribus igitur modis, si detur punctum quodlibet X extra vel intra Circulum $ABCD$, exprimi poterit $\int XS$ etc., cuius triplicis expressionis usum uberrimum inferius videbimus. Sit enim punctum X'; et primum erit $\int X'S$ etc. $=$

 $X'C$.

$X'C.NLM = X'C.RQPV$. Secetur EX'' ita, ut sint $X'E:AE:X''E \div$, fiatque $EX''' = EX''$. Quibus omnibus apte paratis habetur $\int X'S$ etc. $= \frac{AE}{X''E}\int X''S$ etc. $= \frac{AE}{X'''E}\int X'''S$ etc., vel $\int X'S$ etc. $= X'C.NLM = \frac{AE.X''C}{X''E}.NLM = \frac{AE.X'''C}{X'''E}.N\Delta M$. Quod postremum dubio caret, quum ostensum iam fuerit esse perimetros similes $NLM:N\Delta M::X'''C:X''C$. Et ipsa valet proportio quo ad perimetros integras similium Ellipsium $RQPV$: $R\Lambda P\Xi$. Duae igitur Ellipses similes communem Axem habentes, at in una maiorem, in altera minorem, eidem Problemati satisfaciunt. Nec tantummodo Ellipsis duplex totum hoc $\int X'S$ etc. repraesentat, sed etiam partes *homologae* undequaque consentiunt. Ad hoc obtinendum sufficit radio cuilibet AO perpendicularem ducere $A\Pi$; eritque semper $\int X'S$ etc. ab A ad S tam $= X'C.NO$, quam $= \frac{AE}{X'''E}.X'''C.\Delta\Pi$; eademque ratione $\int X'S$ etc. ab A ad S tam $= X'C.ZRY$, quam $= \frac{AE}{X'''E}X'''C.\Omega\Lambda\Gamma$, emissa $\Omega\Gamma$ normali ad AC (36). Ellipses autem istae $N\Delta M$, $R\Lambda P\Xi$ etc. eo magis a Circulis inscriptis recedunt, quo punctum X''' ad punctum C propius accedit, et in puncto C limitem habent, quum vertices Δ, Λ in infinito se abscondant. Quo in limite nec in falsum abit inconcussa veritas Geometriae (37). Est enim ultimus limes perimetri Semiellipseos $N\Delta M$ tangens infinite-longa $K\Upsilon$, cuius dimidium, propter similia semper Triangula $HC X''' I'''$, AX''', et proportionem $o:CA:C\Upsilon \div$, fit $\frac{CA^2}{o}$, ideoque tota $= \frac{2CA^2}{o}$, et Summa rectarum egredientium a puncto C in arculos etc. Circumferentiae datae $CBAD$, quum sit $= CX'''.N\Delta M$, evadit $\frac{o.2CA^2}{o} = 2CA^2$, uti de puncto A superius disserui. Quin etiam $\int X'S$ etc. $= \frac{AE}{X'''E}.X'''C.N\Delta M$ convertitur pro puncto eodem C in Summam etc. rectarum ab $A = \frac{AE}{AE}.2CA^2 = 2CA^2$, puncto X' tum abeunte in A quum X''' abeat in C vel X'' in A, ut sarta tecta sit Harmonica proportio rectarum $X'C$, AC, $X''C$, necnon proportio Geometrica $EX'':EA:EX' \div$, de quibus antea loquebar. Superato extremo diametri C a puncto X^{v}, Semiellipsium Ellipsiumque eadem series, sed

sed retrograda, redit; quod adeo facillimum est, ut explicationis non egeat.

9. Dignum potius existimo quod Geometrae admirentur ab uno hoc simplicissimo Pascalii Theoremate, aliquantulum exornato, ea omnia derivari, quae ope motus *repentis* aut *reptorii*, ac Curvarum, quas vocavie *multigibbas*, Ioannes Bernoullius, et post longos Calculi finitorum atque infinite-parvorum labores Leonardus Eulerus dedere ad proximam inveniendam aequalitatem perimetri Ellipseos conicae, et Circularis peripheriae (38). Libet in re amoenissima paulisper immorari. Coniungebat Bernoullius (Fig. 8.) in eandem lineam rectam duos Semiaxes BC, CA cuiuslibet Ellipseos datae, ac super AB, eorum *summam*, veluti diametrum describebat Circuli Semicircumferentiam. Qua Semicircumferentia divisa in quosvis numero aequales arcus 2, 4, 8, 16, 32, 64 etc., ductisque a puncto C ad omnia divisionis puncta rectis lineis, adfirmabat Lineam rectam Mediam arithmeticam rectarum ad puncta imparia pertinentium (in Schematis exemplo $\frac{C1 + C3 + C5 + C7 + C9 + C11 + C13 + C15}{8}$) fore radium Circuli, cuius Peripheria proxime maior Ellipseos datae Perimetro, Mediamque arithmeticam Summae rectarum ad divisionis puncta paria ductarum et radii AD (nimirum $\frac{C2 + C4 + C6 + C8 + C10 + C12 + C14 + AD}{8}$) esse radium alterius Circuli Circumferentiam habentis proxime minorem Perimetro ipsius Ellipseos, hosque Limites arctiores esse, quo magis augeatur numerus divisionum descriptae Semiperipheriae. Sed universalius Eulerus Limites istos in unum componens adseruit, eâdem hypothesi facta, radium Peripheriae circularis proxime aequalis Perimetro Ellipseos Apollonianae exprimi a Formula generali

$$\frac{AD + C1 + C2 + C3 + C4 + C5 + C6 + C7 + C8 + C9 + C10 + C11 + C12 + C13 + C14 + C15 + \text{etc.}}{n}$$

quicumque fuerit divisionis numerus n, et hoc in immensum adaucto perfectam haberi Perimetrorum Ellipseos et Circuli aequalitatem. Cuius pulcherrimi Theorematis *Isoperimetrici*, et in praxi geometrica perquammaximae utilitatis (39), demonstratio non e longinquo petenda est, quum sit ipsum Theorema Pascalii. Et re quidem vera, si concipiatur descripta tota Peripheria diametrum habens AB, erit $2n$ numerus arculorum aequalium, Summaque rectarum omnium in arculos quo ad *focum* C pac. fiet

 pro-

producto unius arculi in Summam earundem rectarum. Igitur (si π Circumferentiam Circuli radio 1 gaudentem indigitet) obtinebitur ex praemissis $\int CA + 2C1 + 2C2 + 2C3 + 2C4 + 2C5 + \text{etc.} + CB$ in $\frac{AD \cdot \pi}{2n}$ aequalis dimidio Perimetri Ellipseos, cuius Semiaxis Transversus AB et Coniugatus $\frac{CA \cdot AB}{CB}$, ducto in CB; sive $AD \cdot \pi \cdot \int \frac{AD + C1 + C2 + C3 + C4 + C5 + \text{etc.}}{n}$ $= CB$ in Perimetrum Ellipseos similis, quae Semiaxem maiorem habeat AD, et minorem $\frac{CA \cdot AD}{CB}$. Exinde oritur Proportio geometrica $CB : AD$ :: Circumferentia Circuli, cuius Radius $\int \frac{AD + C1 + C2 + C3 + C4 + C5 + \text{etc.}}{n}$, ad Perimetrum Ellipseos praedictae. Sed ut $CB : AD$, ita est Perimeter Ellipseos similis Semiaxe transverso CB gaudentis et Coniugato $\frac{CB}{AD} \cdot \frac{CA \cdot AD}{CB} = CA$ ad praedictae illius Ellipseos Perimetrum. Descripta igitur Radio $\int \frac{AD + C1 + C2 + C3 + C4 + C5 + \text{etc.}}{n}$ Peripheria circulari, peraequabit ista Perimetrum Ellipseos, cuius Semiaxes fuerint CB et CA, dummodo sit n infinitus, ac summopere ad longitudinem illius Perimetri adpropinquabit si n praegrandis etc. (40): quod paucis demonstrandum assumpseram.

10. Alio praeterea modo exponi potest Theorema illud Euleri, ut eandem adquirat rectarum in Circulo excentricarum *Summa* universalitatem, quam habet ipsarum *Productum* in eximio Rogeri Cotesii Theoremate (41). Si etenim Ellipseos datae Semiaxes (Fig. 9.) CB, CA in eâdem recta iaceant, et super ipsorum *differentiam* AB, veluti diametrum, describatur Circuli Peripheriae medietas, dividaturque in arcus aequales, numero n, eductis a puncto C rectis lineis ad divisionis puncta singula, erit AD Fig^{ae}. 8^{ae}. $= CD$ Fig^{ae}. 9^{ae}. $=$ Semisummae CB, CA. Verum Elementa docent quamlibet rectam $C9$ ex puncto C parem esse $A9$ in concentrico Circulo ex puncto A (42), sive $C9$ in Fig^{a}. 8va. Ergo

$\int \frac{AD + C1 + C2 + C3 + C4 + C5 + \text{etc.}}{n}$ in Fig^{a}. 8^{a} $=$

$\int \frac{CD + C1 + C2 + C3 + C4 + C5 + \text{etc.}}{n}$ in Fig^{a}. 9^{a}., unde liquet posteriorem formulam, aeque ac priorem, suppeditare Radium Circuli aut proxime aut vere *isoperimetrici* cum eâdem Ellipsi adsignata.

11. Sed

11. Sed etiam rectificatio Cycloidum *contractarum* et *protractarum* (ne dicam de omnimodis a Circulo genitis Epicycloidibus aut Hypocycloidibus iuxta Hôpitalium ope eiusdem Pascalii doctrinae rectificandis), quae praecipuum erat Pascalii Theorematis argumentum, eumque subsidio Calculi, hodie deperditi (43), adlaborantem valde detinuit, mira quadam facilitate restitui poterit. Tota res pendet a Tangentium Cycloidum omnium theorice, quam ego ab unius Lineae rectae affectionibus deductam in Adversariis meis olim reposui (44), et nunc pulvere excusso transcribo fideliter. Hemicycloidem primariam ABC (Fig^a. 10.) relatam ad Semiperipheriam genitoris GEB omnes norunt vicem gerere aequicruris Trianguli rectilinei. Tangens igitur ad punctum D in tangente genitoris EF necesse est ut abscindat $EF = ED$; quapropter angulus $FDE = \frac{FEH}{2} = BEH$, et tangens ideo DF parallela chordae genitoris EB. Eodem modo in Cycloidibus secundariis Hemicyclois ad Semiperipheriam relata genitoris sui repraesentat Triangulum scalenum specie datum. Quae species ea est, ut in *contracta* (Fig^a. 11.) sit DE ad EB in ratione constante minoris inaequalitatis Baseos AC ad Peripheriam genitoris $BEGH$, et in *protracta* (Fig^a. 12.) in ratione pariter constante, sed maioris inaequalitatis. In utraque igitur Curva Triangulum *Tangentiale DEF specie* datum erit, quod fieri nequit nisi pars EF tangentis Circuli genitoris semper adaequet respondentem arcum BE, ut in Cycloide communi (45). Diviso itaque arcu quolibet genitoris EBH, determinato a producta recta DE, in puncto I, quod ita eum secet, ut Chorda EI ad Chordam IH sit in illa ratione constante vel minoris vel maioris inaequalitatis, erit EI parallela tangenti DF, quum similia evadant Triangula DEF, EIH ex Euclide. Quod punctum I non idem manens, sed perpetuo mobile pro qualibet DE, et facillime determinatur ex Elementis, et in *vicarium* punctum fixum convertitur sequente modo. Fiat Radius genitoris OG ad OK, ut Genitoris circumferentia ad Basim Cycloidis *contractae* seu *protractae*, iunctâque KE, et ad istam educta normali EI, haec dividet arcum EBH in puncto quaesito, ita, nimirum, ut sit $EI : IH :: OK : OG$ (46). Eâdem ergo lege, qua in primaria Cycloide Chorda GE, ab extremo Axis ducta, est semper perpendicularis Tangenti DF, non dissimiliter in Cycloidibus secundariis recta KE, a puncto immobili Axis, vel eius protractionis, K emissa,

emissa, normalis est ad Tangentem DF. Habetur enim Triangulum EOK in centro O Genitoris simile tam HIE, quam FED, ob aequalitatem angulorum EOK, EIH, DEF ex Elementis, et EKO, HEI propter KE perpendicularem ad EI et KOB ad EH (47). Ex quo proportiones emergunt $AC:BEGH::OK:OG::OK:OE::EI:IH::DE:EF$, methodusque facillima oritur ducendi Tangentem in puncto D vel educta DF perpendiculari ad KE, vel parallela ad EI, quae cum KE angulum rectum efficiat (48). Hisce iam positis, quum tangens DF ad FE, ideoque et elementum curvae Cycloidalis omnimodae ad elementum circumferentiae Circuli genitoris rationem eandem habeat, quam KE ad radium EO, erit etiam tota Perimeter Cycloidalis $ADBC$ ducta in Radium EO aequalis $\int KE$ etc in arculos universae genitoris Circuli Peripheriae. Haec *Summa* pro communi Cycloide Fig^{ae}. 10^{mae}. ex §§. 7mo. et 8vo. par est $2GB^2 = 4GB.EO$, et ideo fit tota Perimeter $ABC = 4GB$, ac Semiperimeter $AB = 2GB$, necnon ex ipso §. 7mo. Arcus quilibet $BD = 2BE$, quum habeatur $\int KE$ etc. ab E ad $B = GB.BE = 2BE.EO = BD.EO$ propter demonstrata superius (49). In ceteris vero Cycloidibus erit per iam dicta in §. 8vo. Perimeter tota $ADBC$ in Radium genitoris OG aequalis Perimetro Semiellipseos conicae XYZ (Fig^a. 13.), cuius Semiaxis transversus $TX = BG$ axi sive diametro genitoris, et Semiaxis coniugatus $TY = \frac{KG}{KB}.BG$, ductae in rectam KB. Valet igitur haec proportio, nimirum, Curva Cycloidalis $ADBC$ ad Curvam Semiellipticam XYZ ut $KB:OG$, vel ut $2KB:BG = TX$, sive ut Perimeter Semiellipseos LMN *similis* descriptae XYZ et Semiaxem transversum habentis $TL = 2KB$, Coniugatum $= TM = 2KG$, tam in *protracta*, quam *contracta* Trochoide. Aut si integram mavis Ellipsin, ea quoque praesto est in altera Ellipsi $PQRV$ *simili* duabus descriptis et Semiaxe transverso gaudente $TP = \frac{TL}{2} = KB$, sive Axe transverso $PR = 2KB$, et Coniugato $QV = 2KG$. Hemiellipsis itaque LMN, aut Ellipsis $PQRV$, partesque earum homologae iuxta §. 8^{vum}., Cycloidali perimetro $ADBC$, eiusque partibus peraequantur. Et Semiaxes Axesve mira facilitate inveniuntur, quum pares sint Lineis datis $2KB$, $2KG$ (50).

12. Multa coronidum ad instar a praecedentibus derivantur. Ac primum

mum observandum redit in Cycloide *primaria*, propter rectae *KG* evanescentiam, Ellipsin *PQRV*, utpote Coniugato Axe carentem, in bis Transversum Axem *RP* commutari, ideoque longitudinem Semicycloidis illius esse $= PR = 2KB = 2GB$ (Fig^{a}. 10.) duplae diametro Genitoris. Quod ipsum paucis immutatis et ab Hemiellipsi *LMN* sponte fluit (51). Dimanat etiam Theorema, curiositate nulli secundum, quod datis duabus Cycloidibus, una *contracta*, et altera *protracta* (Fig. 11. 12.), adeo compositis, ut Basis unius *AC* adaequet Circumferentiam *BEGH* genitoris alterius, et vicissim, Cycloides istae *ABC* sint *isoperimetricae* (52). Punctum etenim, seu *focus K* in quavis *secundaria* Cycloide ille erit, qui determinet Radium *OK* Circularis peripheriae Basi *AC* longitudine aequalis. Hypothesis autem suppeditat *KO* in *contracta* aequalem *BO* in *protracta*, *OB* in *contracta* parem *KO* in *protracta*, et ideo $KB = KB$ in utraque Cycloidum, et $KG = KG$, nempe aequales erunt in una alteraque Curva Semiaxes Ellipseos (Fig^{a}. 13.) *PQRV* eandem cum *contracta* et *protracta* Cycloide habentis perimetrum. Ellipsium denique istarum contemplatio pro dimetienda Cycloidum perimetro in mentem revocat Ellipsim pariter conicam pro arearum mensura (53). Semibasi *AG* et Diametro Genitoris *BG* veluti Semiaxibus circumscribatur *primariae* Cycloidi (Fig^{a}. 10.) Hemiellipsis *ALBMC*. Huius area ad illam inscripti Semicirculi radium habentis *GB* erit in ratione $AG:GB$, in qua ratione pariter erit ad duplum Circuli genitoris *BEGH*. Eapropter area *ALBMC* ad triplam aream genitoris, sive ad aream totius Cycloidis *ADBNC*, se habebit ut *AG* ad Axem *BG* cum dimidio, scilicet in ratione Circumferentiae cuiusvis Circuli ad triplum Diametri, vel ut quaelibet Circuli Peripheria ad Perimetrum inscripti Exagoni (54), aut in ratione Baseos *AC* Cycloidis ad eius Arcum *ADBN*, cuius extremum *N* determinetur ope ordinatae *PN* ductae a puncto *P* bisectionis Radii *OB*, non secus ac pro obtinendo Hugeniano Segmento *quadrabili*, in quo puncto *N*, ob latus Exagoni *BR* aequale Radio, evidenter Arcus Semicycloidis *BC* bisecatur. Non aequa in Cycloidibus *secundariis* facilitas, sed nequidem difficultas manet huiuscemodi, quae Geometrae fastidium moveat. Area etenim cuiusque Cycloidis *ADBNC* aequalis est inscripto (55) simul Triangulo rectilineo *ABC* et Circulo genitori *BEGH*. Ellipsis autem conicae medietas *ALBMC*, quae habeat Semiaxes *AG*, *BG*, est ad Circulum genitorem *BEGH* ut *AG* ad *OG*,

Circulus

Circulus ipse genitor ad Triangulum *ABC* cum Circulo genitore ut *OG* ad $OG + 2OK$: ergo ex aequo Area Semiellipsis *ALBMC* ad aream Cycloidis *ADBNC* erit ut Semibasis Cycloidis *AG* ad Summam genitoris Radii, sive Semiaxis, $OG + 2OK$. Quae nunc reperta arearum Proportio non modo mirabilem exhibet analogiam inter Ellipses *rectificatrices* et *quadratrices* Cycloidum, quum utraeque puncto eodem *K* sint innixae, verum etiam manifestum facit casum illum singularem in Cycloide *contracta*, perfectae, nimirum, ac geometricae aequalitatis arearum Cycloidis et Semiellipseos, qui casus contingit dum *OK* sit tertia Proportionalis geometrica post differentiam Semiperipheriae genitoris ac diametri $BEG - BG$, et Radium *OG*, scilicet, quum ratio determinans $AG : GEB$ eadem sit ac Radii cuiusque Circuli et Differentiae inter Semiperipheriam atque Diamerrum, quippe tum Lunulis *AD*, *DB*, necnon *CN*, *NB* se mutuo peraequantibus.

13. Haec omnia, quae parerga sunt Theorematis Pascalii, facem praeferunt ad maiora. Contemplati hactenus sumus *focum*, a quo rectae innumerae ducantur ad Circuli circumferentiam, in eodem huius plano iacentem; nunc autem in Fig^a. 6^a. punctum ω extra planum Circuli positum contemplemur. Formula § 2^i. manet nihilominus inconcussa. Fit namque post emissam a dato puncto ω ad planum Circuli dati *AUNV* perpendicularem datam ωX, ductamque per Centrum *Z* rectam *XNZA*, quaelibet rectarum $\omega S = \sqrt{\overline{X\omega}^2 + \overline{XS}^2} = \sqrt{\overline{X\omega}^2 + \overline{XN}^2 + 2XZ . AN - 2XZ . AT}$ $= \sqrt{\overline{\omega N}^2 + 2XZ . AN - 2XZ . AT}$; adeo ut *foco* *X* in *focum* ω permutato nulla in formulae compositione mutatio consequatur. Differt enim tantummodo postrema haec expressio ab illa §. 2^i. in Quadrato ωN^2, quod in priore erat XN^2. Differentia autem ista patefacit Summam innumerarum rectarum ωS, quae latera sunt Coni *scaleni* Basim habentis Circulum *AVNU*, Verticem ω, Altitudinem ωX, ductarum in arculos *SV* aequalem esse Superficiei Hemicylindri *scaleni*, cuius basis sit Semicirculus idem *CAL*, latus vel axis ωA, altitudo ωN, et sinus-rectus anguli obliquitatis $\frac{\omega N}{\omega A}$, eâdem manente longitudine rectae *AO* uti pro *X* puncto ichnographico, quum Euclides statuerit $AO = \sqrt{\overline{\omega A}^2 - \overline{\omega N}^2} = \sqrt{\overline{XA}^2 - \overline{XN}^2}$. Ellipsis pariter conica, a cuius rectificatione Summa ipsa depender, in eo tantum discrepat, quod pro *foco* *X*, seu proiectione orthographica puncti ω, ratio Axis transversi (qui manet idem tam pro ω, quam pro *X*, videlicet

delicet $= AN$) ad coniugatum sit $XA:XN$, dum pro puncto sublimi ω est $\omega A:\omega N$, nimirum maximi ad minimum laterum in superficie Coni obliqui iacentium. Omnes igitur affectiones, quas antea in §§. 3°. 4°. 5°. et 6°. fusius exposui vel ad dimetiendas ope superficiei cylindricae, vel ope Ellipseos Summas rectarum a *focis* emissarum in plano Circuli ad eius Circumferentiam, et quamlibet harumce partem, conveniunt eodem modo etiam *focis* extra Circuli planum sitis, ita ut $\int \omega S . SV$ etc. $= \omega A$ in Perimetrum Hemiellipseos, seu integrae Ellipseos, et sic de partibus proportionalibus in infinitum, quemadmodum obviam fit praeterita repetentibus. Quinimo, dato quolibet Cono *scaleno* $NSVAU\omega$, et secto ope Plani $A\omega N$ ad Basim normalis facillimum erit invenire in diametro Baseos, eiusque productione, puncta ν, θ, *focos* vicarios suppeditantia, adeo ut ipsamet specie Superficies Cylindrica, ac ipsaemet magnitudine et specie Ellipses conicae (56), quae Summis rectarum νS in arculos SV, aut θS in SV repraesentandis satisfaciant iuxta §§. 7um. et 8um., inserviant quoque ad Summam consequendam, eiusve partes, rectarum a *foco* ω progredientium. Bisecto etenim angulo $A\omega N$ ope rectae $\omega\nu$, et ad istam educta perpendiculari $\omega\theta$, puncta occursus ν, θ erunt *foci* vicarii quaesiti. Habentur quippe ex Theoremate elementari Proportiones geometricae $\omega A:\omega N :: A\nu:\nu N ::$ $A\theta:\theta N$; et ideo ratio transversi Axis ad coniugatum $\frac{\omega A}{\omega N}$ pro rectis in superficie Coni *Scaleni* eadem manet ac $\frac{A\nu}{\nu N}$, et $\frac{A\theta}{\theta N}$ pro rectis emissis a *foco* ν, seu θ in Circuli plano. Summa igitur rectarum in Cono $\int \omega S . SV$ etc.

$$= \frac{\omega A}{\theta A}\int \theta S . SV \text{ etc.} = \frac{\omega N}{\theta N}\int \theta S . SV \text{ etc.} = \frac{\omega A}{A\nu}\int \nu S . SV \text{etc.} = \frac{\omega N}{N\nu}\int \nu S . SV$$

etc. (57). Quo rite concepto Summae rectarum in Cono quolibet, nequidem *recto* excluso (58), a Summis rectarum in Plano Baseos facillime determinantur, atque unum et idem sunt duo Problemata hactenus explicata, uti fusius in §. 20mo. schematibus novis adpositis palam fiet.

14. Huic commodo perinsigni accedit proprietas elegantissima, quam silentio praeterire nefas foret. Punctum idem θ et analogum ν non uni obliquo Cono $\omega NUAVS$ vicarios *focos* praebent, sed innumeris Conis *scalenis* eàdem Basi gaudentibus, quorum vertices $\omega, \omega', \omega'', \omega'''$ etc. siti sint

in Circuli peripheria diametrum habente $\nu\theta$ (59). Per doctrinam etenim Galilaei (60) descripta peripheria est *locus* geometricus occursuum rectarum ab extremis punctis A, N ductarum, quae eandem servent rationem: quapropter $\frac{\omega A}{\omega N} = \frac{\omega' A}{\omega' N} = \frac{\omega'' A}{\omega'' N} = \frac{\omega''' A}{\omega''' N}$ etc. $= \frac{A\theta}{\theta N} = \frac{A\nu}{N\nu}$, et universi hi Coni ad easdem Superficies Cylindricas, et Ellipses easdem referuntur. Inter Conos istos sine numero quisque videt illum altitudinis maximae $\delta\gamma$, alterum, cuius vertex λ imminet perpendiculariter puncto N, Conorumque paria, uti ω'', ω'', altitudines $\omega''\varepsilon, \omega''\eta$ aequales habentia. Fons autem huiusce Theoriae de Conorum *scalenorum* familiis unico puncto *vicario* θ respondentibus (nam aliud ν ex primo dimanat, quemadmodum in §. 7mo.) altius repetendus est, nimirum, a pulcherrima cuiuslibet obliqui Coni proprietate, quae doctrinae a Galilaeo traditae veluti appendix toto iure nuncupari poterit, tametsi nec in veterum, nec in recentiorum Geometria ipsius vestigium invenerim. Dato quocumque Cono *scaleno* (Fig. 14.) $AODLM$, cuius altitudo AB, maximum laterum AL, minimum AO, et C punctum in producta diametro LO adeo positum, ut $LC:CO :: AL:AO$, si ex vertice A ducantur latera Coni AD, AD' etc., et a puncto C rectae CD, CD' etc., erit semper constans ratio inter AD, CD, seu AD', CD' etc., scilicet, aequalis rationi *datae* $AL:CL$, vel $AO:CO$. Non solum igitur Circumferentia circuli PAC *locus* est occursuum rectarum sine numero AL, AO etc. eandem rationem geometricam habentium, et in eodem Circuli plano sitarum, sed etiam peripheria $ODLM$ ad illam normalis est *locus* alter occursuum rectarum AD, DC etc., quarum ratio sit eadem ac $AO:OC$. Tota res pendet a minus noto Theoremate elementari, quod ad Problemata more veterum Analyseos resolvenda mirum in modum perducit. Theorema est quod dato Triangulo OAC oxygonio, si ducatur AP perpendicularis lateri AC, atque AL, quae cum AP efficiat angulum $PAL = PAO$, et bisecetur OL in puncto Z, et AB sit normalis OC, habeatur $CO^2:AO^2 :: CZ:BZ$; quod ipsum et de $CL^2:AL^2$, et de Triangulo amblygonio LAC vicissim comprobatur. Qui demonstrationes simplicissimas cupiat in Adnotatione (61) reperiet. Veruntamen obiter dicam istud Theorema, eiusque derivata (62), universalem sistere canonem, quo celeberrimae Propositiones contineantur de Triangulis orthogoniis. Singularis etenim casus est si AO cum AP confundatur, ideoque etiam AL, ac

punctum

punctum Z cum puncto P, evadatque $CP^2 : PA^2 :: CP : PB$, et $CP : PA : PB \div$; quae proportio ad Theorema Pythagoricum recte ducit. Interea iuverit prodidisse additamentum ad ea, quae Galilaeus ante omnes communicavit, ac detexisse caussam et originem primitivam, ob quam Summa laterum Coni rationem servet determinabilem ad Summam rectarum in plano Circuli positarum, quum ostensum iam sit $AO : OC :: AD : DC :: AD' : D'C :: AL : LC ::$ etc. in infinitum, unde fiat $AO + AD + AD' + AL +$ etc. : $OC + DC + D'C + LC +$ etc. :: $AL : LC$, quemadmodum supra. Natura denique ipsa nobis suadet haudquaquam in Cono contingere posse, ut in Plano, $\int AD$ etc. in arculos Basis esse geometricae quadraturae capacem (63), quam nunquam evanescat AO, nec ideo focus *vicarius* C in O transeat, Summamque ipsam in unico Cono *recto* propter $AO = AL$ a Circuli *tetragonismo* pendere (64).

15. Universa, quae anteacto saeculo tradiderunt Robervallius, Lalovera, aliique (65) de Cyclocylindricis, et Ungulatibus superficiebus (66), ac ea, quae protulit Pascalius ipse vel de Triangulis Cylindricis (67), vel de Conis obliquis agens, Corollaria sunt speculationis hactenus institutae. Non pigeat haec omnia paucis commemorare, ut Theorematis unius in §. 3^io^. explicati eo magis dignitas elucescat. Ac primum Robervallius solutum dedit Problema elegantissimum dimetiendi partem $RTOLQMR$ Superficiei cuiuslibet *recti* Cylindri circularis abscissam a Circini revolutione IR, dummodo cruris extremum I maneat in Superficie adsignata (Fig. 15.)(68). Prolixa et involuta auctoris ipsius demonstratio (69) sic breviter absolvitur. Est $IT = IR = IO$, scilicet, $IS^2 + ST^2 = IS^2 + SC^2 + OC^2$, vel demum $ST = OS$. Summa igitur elementorum $ST . SV = \int OS . SV$ etc. in Cono *scaleno* $OCSIU$, nimirum ex §. 13^io^. par est semissi Superficiei Cylindri *scaleni*, cuius Basis Circulus EC diametrum habens duplam IC, axis seu latus EB, DC adaequet latus maximum Coni OI, et altitudo OC latus minimum; sumptisque duplis erit Area integra Cyclocylindrica $RTOLQMR$ aequalis integrae Superficiei Cylindricae $EBDC$ etc. in Schemate ipso depictae, uti Robervallius invenit. Quae superficies Cylindrica, evanescente altitudine CO, nimirum, facta Circini apertura $IB = IC$ diametro Baseos, in Superficiem planam convertitur parem quatuor simul quadratis IC, et

Areae Cyclocylindricae singularis BCN, quemadmodum idem Robervallius ostendit (70). Longius equidem progressus est Lalovera, qui Areas Cyclocylindricas geometrice etiam quadrabiles in comperto habuit dum centrum rotationis collocetur exterius in X, et Circini apertura sit *ad unguem* XC. Ubilibet sit enim positum X, erit semper $S\nu^2 = XC^2 - XS^2$, et $S\omega^2 = IC^2 - IS^2 = CS^2$ in Cyclocylindrica quadrabili Robervallii. Sed $XC^2 - XS^2 : IC^2 - IS^2 :: C\lambda^2 - \lambda S^2 : CS^2$ si producta chorda CS ad eam ducatur normalis $X\lambda$, seu parallela IS, et ratio $C\lambda^2 - \lambda S^2 : CS^2$, utpote aequalis rationi $CX^2 - XI^2 : IC^2$, constans est. Igitur $S\nu^2$ ad $S\omega^2$ in ratione constante; et ideo etiam $S\nu$ ad $S\omega$, ac elementum $S\nu . SV$ ad alterum $S\omega . SV$ rationem habebit constantem $YI : IB$; quam rationem et integrae Areae Cyclocylindricae servabunt inter se. Area vero $BCN = IB . 4IC$; ergo Area $YCZ = YI . 4IC$ (71). Haec Cyclocylindricarum Quadratura, earumque partium proportionalium ex §. 7mo., est ipsamet Quadratura Arearum *ungularium* Cylindri recti (72), quum *primaria* vel semiorthogonalis Ungula sit eadem ac Hemicyclocylindrica Robervallii extensa ac erecta super Semiperipheriam, quae habeat diametrum $CE = 2CI$, et idem valeat de Ungulis *secundariis*, quae, si *protractae* sint, respondent nominetenus Cyclocylindricis Laloverae, si autem *decurtatae*, respondent Cyclocylindricis, quae instar exteriorum Laloverae describerentur in Cylindro cavo ope Circini $X'C$, et centri X' interioris (73). Dum hasce Ungulas nomino, universa etiam complector, quae Vincentius Vivianus commentatus fuit de Fornicum Superficiebus: omnis etenim eius labor Ungula est, sive Theorema illud Pascalii, toties, sed nunquam satis laudatum, ut alibi demonstrabo (74). Conversio Cyclocylindricarum in Ungulas, quae Sereno docente Ellipsibus conicis circumscribuntur, et in planum expansae nihil aliud sunt quam notissimae Comites Cycloidis *primariae* vel *secundariae* (quarum Aequatio universalis $y = a' \, Sin. \frac{\pi x}{a}$), male ab aliquibus nuncupatae Trochoides *protractae* sive *contractae* (Tom. II. *Introductionis* etc. Euleri ad pag^{am}. 296^{tam}. $\frac{x}{c} = Sin. \, A. \frac{y}{a}$ *Linea Sinuum*), ac in Theoria sonorum celeberrimae usque a Taylori temporibus (M.DCC.XV.), de quarum rectificatione per Ellipseos conicae perimetrum Alembertus ipse obiter loquutus fuit in *Commentariis Academiae Berolinensis* ad annum M.DCC.XLVII. (pag^{a}. 244ta.), sed nec eam demonstravit, nec fortasse tam

simpli-

simplicem novit, omnium quoque Cyclocylindricarum Perimetros suppeditat, utpote aequales perimetris Ellipsium habentium Semiaxem transversum, qui in *primariis* possit duplum *IC*, in *protractis* possit *IC* simul cum *IY*, et in *decurtatis IC* simul cum *IY'*, dum Semiaxis coniugatus communis $= IC$ (75). Post Helicem Cylindricam a veteribus contemplatam, Cyclocylindricae exemplum praebent in recentiorum Mathesi fortasse primum, ac perinsigne Curvarum *duplicis curvaturae*, quarum Perimetri mensura ope Curvarum in eodem plano iacentium obtineatur (76). Triangula demum Cylindrica cuiuslibet speciei et magnitudinis in partes, dum necesse sit, resoluta vel ope Rectangulorum aut Zonarum Cylindri, vel ope Frustorum Ungulae, nunc summas, nunc differentias sumendo, mensuram Arearum ex dictis recipere nemo non videt. Tota ergo sublimior Geometria, quam elapso saeculo XVII°. humani ingenii miracula prodidisse fatendum est, parum abest quin unico Pascalii Theoremate sustineatur (77).

16. Ungulae autem tractatio mihi quoque invito in mentem revocat commentationes nonnullas, quibus adolescens adhuc perquammaxime delectabar. Legebam in *Actis Eruditorum Lipsiensibus* (78) Ehrenfreidum Walterum de Tschirnhausen Curvam *mechanicam* quadrabilem veluti novam, et a nemine exhibitam animadvertisse, quae tamen notissima Ungula erat, quo ad *abscissas* proportionaliter decurtata, quo ad *ordinatas* proportionaliter aucta. Revera Curvae ab auctore datae origo haec est (Fig. 16.). Sit Circuli quadrans *AFH*, arcus quicumque abscissus *HG*, sinus-rectus *GD*, quadrans concentricus *DE*. Fiat $FH:HG::AH:HB$, et perpendiculariter ducatur *BC* aequalis perimetro quadrantis *DE*; eritque punctum *C* in Curva quaesita. Abscissae itaque *AB* ad Arcus *FG*, sive ad abscissas Ungulae, sunt in proportione diminuta Radii ad Quadrantis peripheriam, dum e contra Ordinatae *BC* sunt ad *AD*, seu *GK* Sinus-rectos, aut Ungulae ordinatas, in proportione aucta peripheriae Quadrantis ad Radium. Curva igitur est eadem, sed deformata, Semiungula in Planum expansa, et Elementa docent tam integram eius Aream, quam ipsius partes, peraequare Aream, et partes quadrabilis Ungulae, quum Rectangula homologa et infinite-parva utriusque Curvae paria sint propter bases inverse altitudinibus proportionales (79). Recentius exemplum praebent *Miscellanea Berolinensia* quo loci Ioannes Henricus Hertenstein operosissime satagit demon-

monstrare mensuram Solidi Ungularis a Cylindro *recto* rescissi (80). Complures paginas implet ut tandem ostendat quod pene una absolvitur linea; mirùmque est agere illum de superficie Ungulae expansae perinde ac si Area huius ante ipsum incognita fuerit (81). Veruntamen non opus erat suo Calice Cylindrico (a Galilaeo tam nobiliter in *Dialogis De nova Scientia etc.* exornato, et fortasse Indivisibilium uberrimo fonte), non opus rationem quaerere Ungulae ad aeque altum Cylindrum. Ungula etenim *ABEC*, quaecumque sit, ictu oculi in Pyramidulas tetrahedras resolvitur (Fig. 17.), quarum vertex communis in Centro *D*, basis unum ex elementis *IOST*, altitudo communis *DI*, aequalis Radio *DE*. Summa igitur Pyramidularum, sive totum Solidum ungulare, par erit uni Pyramidi, quae pro basi habeat Superficiem integram Ungulae, nimirum Rectangulum *AC.BE*, et pro altitudine Radium *DE*. Perfectam (nec transcendentem) hanc Solidi *cubaturam* (eiusque partium) si ad mentem auctoris placeat convertere in proportionem numericam proximam, consequitur facile Pyramidem illam, sive Solidum Ungulae, esse ad Cylindrum aeque altum *ECNABLPM* uti $AC.\frac{AD}{3} : AECM.\frac{AD}{2}$, vel ut tertia pars Diametri ad semissem Peripheriae circularis, videlicet in numeris ab Archimede datis ut $\frac{7}{3} : 11$, sive $7 : 33$, et in numeris Petri Metii ut $\frac{113}{3} : \frac{355}{2}$, vel $226 : 1065$, quemadmodum Hertenstein ipse decernit post tot tantasque Lemmatum praemissorum ambages. Dum herculeas lucubrationes Gregorii a Sancto Vincentio, et Evangelistae Torricellii MSS. pervolutabam (82) de graphica descriptione Sectionum Coni, ea mihi praesertim occurrit, qua Ellipsis obtinetur hoc modo. Sit Circulus *ABCD* (Fig. 18.), ductisque normalibus innumeris *EO*, *FO* etc. ad Diametrum *BD* per totam Peripheriam, fiant *EI*, *FI* etc. parallelae eidem Diametro, et in *data* quaecumque ratione ad praedictas normales. Curva *DIIII* etc. erit Ellipsis conica (83). Si autem recte consideretur, Ellipseos istius semis est Ungula memorata Cylindri, vel *primaria*, vel *secundaria*, quae conversis eius Ordinatis *EI*, *FI* etc., dum maneat rectus angulus *OEI*, *OFI* etc., tandem desinat in Planum baseos: nec parum admiremur oportet in hac extrema Ungulae deformatione illius perimetrum nihilominus manere ellipticam, uti in erecta Cylindrica, necnon aeque quadrabilem esse, videlicet Aream eius peraequare dimidiam ipsius Ungulae erectae. Quod postremum equidem con-

stat

stat si Semissem Ungulae iacentis *DFAGID* referamus ad Triangulum orthogonium *HAG* aequicrure in *primaria*: nam quaelibet *EI* aut *FI* in Ungula par est *PV*, *PV* in Triangulo ex ipsa Ellipseos generatione. Et idem valet de altera medietate *BFAGIB*, quae cum priore habet partem communem *AGS*. Utraque ergo Semiungula iacens Triangulo *HAG* aequalis est, dum Semiungula erecta ex praemissis in §. 15[to]. aequalis est duplo Trianguli, nimirum Quadrato *HAGB*. In *secundariis* autem Semiungula iacens per eandem demonstrationem aequaretur Triangulo *HAK* aut *HAK'*, dummodo *HA*:*AK* in *contractis*, et *HA*:*AK'* in *protractis* fuerit in proportione eàdem cum *OE*:*EI*, *OF*:*FI* etc.; quapropter Semiungula iacens semis erit areae Semiungulae erectae, quae adaequat Rectangulum *HA*.*AK* sive *HA*.*AK'*. Non eadem vero partium homologarum proportio (84). Ceteroquin dum in Ungula erecta *primaria* Area Ellipseos ad Circulum baseos est in ratione $\sqrt{2}:1$, e contra Ellipsis nunc genita *DXSGTBX'S'YT'* Aream semper habet aequalem Circulo genitori *DABC*, quum ex uno latere *EI*, *FI* pares sint *EI*, *FI* etc. ex altero, ideoque *EE*$=$*II*, *FF*$=$*II* etc.; quod evincit Radium *HA* Circuli genitoris esse *medium* geometricum proportionalem inter Semiaxes cuiuslibet harum innumerarum Ellipsium. Sed praecipuam tantummodo Ellipsin examini subiiciamus, quae Ungulam iacentem *primariam* respicit, eiusque proprietates elegantissimas breviter nunciemus, de aliis opportuniore loco disceptaturi (85). Quatuor intersectionum puncta Ellipseos et Circuli facile determinantur: nam *D* et *B* sunt extrema diametri ex Curvae genesi, et *S* aut *S'* ubi *MS*$=$*MN*, scilicet, ubi diameter *SHS'* chordam Quadrantis *AB* ita secet in *Z*, ut $AZ = \frac{BA}{3}$ ex Elementis. Praeterea tam *AG*, quam *CY*, aequales Radio *HA*, Ellipsim tangunt in *G* et *Y*, atque ideo indicant excursus *maximos* Curvae quo ad Diametrum *BD*. Erunt igitur *BHD*, *GHY* Diametri duo inter se *coniugatae*. Quadrantum ergo Chordae *AD*, *CB* tangentes sunt in punctis *D*, *B* Ellipseos genitae. Itaque quadrans unius ex circumscriptis Parallelogrammis erit $GADH = GAHB = HA^2 =$ Rectangulo Semiaxium Ellipseos genitae; quod iterum confirmat Radium genitoris esse *medium* geometrice proportionalem inter Semiaxes genitae Curvae. Accedit quod puncta *X*, *X'*, in quibus Ellipsis occurrit diametro *AC*, non paucam amoenitatem praeseferant, quum sint ita disposita, ut *AH*:*HX*,

sive

sive $CH:HX'$ proportione eâdem gaudeant Diagonalis ad Latus Quadrati, nimirum sit HX, aut HX' tertia geometrica proportionalis post AD, AH Semiaxes Ellipseos Ungulae erectae. Tali autem lege sibi respondent sex intersectionum puncta, ut D, B sint in perimetro Quadrati Circulo circumscripti, X, X' in perimetro Quadrati Circulo inscripti, et S, S' in perimetro Quadrati utrique Semicirculo inscripti. Puncta vero media X, X' determinant alia puncta T, T' *maximi* excursus Ellipseos quo ad diametrum genitoris AC, et idcirco eadem puncta T, T' manent in productione laterum Quadrati Circulo inscripti, ad instar G, Y, quae sunt in perimetro circumscripti. *Maximum* etenim Summae sinus et cosinus Elementa docent haberi ab angulo semirecto. Excursus ergo *maximi* $X\Gamma, X'T$ Ellipticae Curvae ab una diametro AC genitoris, sive puncta Tangentium eidem diametro parallelarum, sunt ad excursus pariter *maximos* BG, DY ab altera diametro BD ut duplum latus Quadrati ad ipsius diagonalem. Axes demum Ellipseos genitae sic inveniuntur. Bisecetur angulus SHB, ab aequalibus diametris Ellipseos SHS', BHD comprehensus, ope rectae $\omega H\omega'$, cui normalis aptetur $\nu H\nu'$; et erunt duo Axes ex Apollonio *positione* dati, datusque angulus conversionis Axium a diametris BD, AC Circuli genitoris. Ut Axes ipsi etiam *magnitudine* dentur, in comperto est gemina affectio superius ostensa, videlicet, Rectangulum Semiaxium $\omega H . H\nu = AH^2$, et $\omega H^2 + H\nu^2 = GH^2 + AG^2 = 3AH^2$, ex Ellipsium omnium natura. Facillima inde constructio suppeditat $H\omega = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} . AH$, et $H\nu = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} . AH$; adeo ut Semiaxium et Axium proportio $\sqrt{3+\sqrt{5}} : \sqrt{3-\sqrt{5}}$ perquammaxime aberret ab illa Ellipseos Ungulae erectae $\sqrt{2}:1$, videlicet diagonalis ad latus Quadrati (86). Vivianii Opuscula versans multis abhinc annis (87) meditabar tres simul Lineas in Superficie Cylindri *recti*, nempe Helicem Apollonii (88), Ellipsim conicam, ac Cyclocylindricam Robervallii et aliorum (Fig. 19.). Mens erat varios comparandi modos, quibus eae secent Superficiem Cylindri. In Hemicylindrica superficie (nam eadem foret ratiocinatio de integra) $ABCLGM$ sit altitudo CO aequalis diametro bascos CA, $AIRO$ Semiellipsis Ungulae, $ATISO$ dimidium unius ex spiris Helicis, et AXO quadrans *primariae* Cyclocylindricae. Neminem latet ram Ellipseos, quam Helicis perimetrum bifariam secare Cylindricam semisuperficiem $ABCONP$; ideoque Helix in Cylindro necesse est ut habeat punctum

flexus

flexus contrarii in I puncto medio Ellipseos, dum e contra, quum Helix in planum extensa Linea recta sit, opus est quoque ut Semiellipsis expansa, sive Linea Sinuum-versorum (89), in eodem puncto medio gaudeat vicissim *flexu contrario*, qui *flexus* hoc modo, sine Calculo inventi, alternantur invicem elegantissime in Superficie convexa, et in plana. Aream vero, seu spatium hemicylindricum ita secat Linea Cyclocylindrica quaevis, aut *primaria*, aut *secundaria*, $ONXA$ quemadmodum Chorda Quadrantis CB secat aream ipsius Quadrantis $CVBD$. Spatium etenim $ONXABCO = CA.CO$, dum Hemicylindrica Superficies $= CBA.CO$; quapropter ea ratio eadem erit ac $CBA:CA$, sive $CB:CD$, sive $CVBD:CBD$. In eâdem etiam proportione secatur quadrans Superficiei Cylindricae $QINO$ ab Ellipseos quadrante IRO Ungulae semirectae, vel quomodolibet *contractae*, aut *protractae*. Ac demum ipse quadrans Ellipseos IRO secat Hemicylindricam Superficiem $FIQONP$ in proportione Circumferentiae circularis ad suam Diametrum, eoquod $OQIFPN = QZ.QIF$, et $OQIR = QZ^2$, unde ratio dimanat $QIF:QZ = QIFX:QF$, quam antea nunciavi (90).

17. Redeo ad Pascalium. Ex hactenus deductis evidens est quod eodem penitus modo, quo rectis innumeris a centro Circuli ad eius circumferentiam emissis IC, IG, IT, IB etc. (Fig. 20.) perpendiculares seu latera singula singulis aequalia CD, GH, TS, BA etc. in superficie Cylindri *recti* disposita respondent, nec dissimiliter latera omnia vel lineae rectae innumerae usque ad Baseos peripheriam in quolibet Cono *recto* OC, OG, OT, OB etc. singulae singulis aequales sunt perpendicularibus sive lateribus FC, VG, HT, EB *recti* Cylindri, et haec aequalitas pariter manet si etiam Cylindri in Hemicylindros convertantur, quorum Basis fuerit Semicirculus $MNBPL$ radium habens BC aequalem diametro alterius, vel cuiuslibet magnitudinis (91), ita contingat innumeris rectis (Fig. 21.) a quovis puncto excentrico interiore aut exteriore X' vel X ad circumferentiam Circuli $ABCD$ eductis, necnon lateribus innumeris in superficie cuiusvis Coni *obliqui* iacentibus $YABCD$, vel $Y'ABCD$, utpote quae rectae aut latera singula paria sint singulis perpendicularibus ad peripheriam Baseos Hemicylindri *obliqui* $FCNHGI$, gaudentis pariter radio AC aequali diametro Circuli dati vel longitudinis cuiuscunque, uti citissime ostendam. Quod primum tam elementare ac simplex est, quam admirabile est alterum, dum mentem subeat praesertim discrepantia naturae Cylindri, et

D Coni

Coni *scalenorum*, qui analogiam omnem, et comparationem respuere omnimode viderentur. Haec nihilo tamen minus inter Conos, et Cylindros *obliquos* ope Theorematis Pascalii detegitur analogia, atque adeo viget, ut cuilibet laterum in Cono erecto *scaleno* YD, vel $Y'D$, semper adsit aequalis LE perpendicularis laterculo, seu tangenti KE peripheriae Baseos Cylindri *scaleni*, tali ordine servato, ut arcus $NK = AD$, iuxta §§os. 3ium. ac 13ium. Paradoxon etiam adparet analogiam istam haudquaquam existere posse nisi inter Conos integros *scalenos* erectos aut iacentes, et Hemicylindros *scalenos* Basim vel duplam baseos Conorum, vel cuiusvis magnitudinis habentes, nulloque unquam modo fieri posse, ut inter Conos, et Cylindros integros *obliquos*, quemadmodum inter *rectos*, nec ideo in Basium integritate aequalitas illa laterum et normalium insideat. Quod dum admirationem excitat philogeometris, videant oportet rationem potissimam, propter quam et totus Conus iacens, et totus Conus erectus *scalenus* analogiam ullam servare nequeant cum toto Cylindro *obliquo*, in eo sitam esse, quod in Conis unum tantummodo innumerorum laterum sit *maximum*, alterum *minimum*, et aliorum laterum series una solum vice repetatur, sed ex adverso in Cylindris duo *maximae*, duoque *minimae* perpendiculares ad Baseos peripheriam sint, et quadruplex fiat aliorum perpendicularium repetitio. Aequalitas autem laterum omnium Coni *scaleni* erecti, aut iacentis perpendicularibus Cylindri *scaleni* ad innumeros refertur Cylindros eâdem obliquitate gaudentes. Sint enim innumeri Cylindri *similes* in Figa. 22. depicti, aut facillime depingendi et considerandi ope rectarum OQ, OP quomodolibet productarum, horumque caput sit $IQP\Phi$, cuius dimidia superficies insistat Semicirculo $\delta I\beta$ radium habenti $O\delta = IO$ diametro Baseos Coni iacentis, aut erecti, quorum vertices X, Y. Indubium est equidem omnes Cylindros *similes* gK, rV, IP, Θn etc. habere perpendiculares homologas ad Basium peripherias in proportione radiorum Og, Or, OI, $O\Theta$ etc., ita, ut perpendiculares ipsae *similibus* arcubus Basium respondentes evadant aequales in omnibus Cylindris, dummodo hi *parilateri* fuerint in Δ, Q, L, B, Ψ, A, P, Ω etc., sive aequali altitudine et axe gaudeant. Non modo igitur Hemicylinder $IO\Pi Q$, sed et $\Theta O\Pi\Delta$, $rO\Pi L$, $gO\Pi B$ etc. perpendiculares habent innumeras, quarum singulae aequentur singulis rectis innumeris a puncto X, aut Y ad circumferentiam OI perductis, quum cuilibet arcui *simili* Basium perpendicularis conveniat eius-

dem

dem longitudinis. Quin etiam si innumerorum horumce Cylindrorum series Plano secetur ad aO communem Axim normali, non modo perimeter Ellipseos HD, sed eae quoque Ellipsium *similium* FE, ZC, ST etc. ad Summam rectarum ab X vel Y in arculos Circumferentiae datae OI obtinendam perducent. Dum etenim fiat $IQ = XI$ vel YI, et per Q transeat Hyperbola *scalena* centrum habens in O, et lineas rectas asymptotas $O\Theta$, $O\Lambda$, haec erit *locus* geometricus $\mu\nu QU\Sigma$, cuius ordinatae $\Theta\nu$, IQ, rU, $g\Sigma$ etc. ea Cylindrorum latera determinabunt, quae ducta in Perimetros semiellipticas $F\omega$, $H\omega$, $Z\omega$, $S\omega$ etc., earumque partes *similes*, peraequabunt Summam praedictam, eiusque partes proportionales (92). Namque illae Semiperimetri sunt in proportione Transversorum Semiaxium, scilicet, in proportione Radiorum Basium ΘO, IO, rO, gO etc., nimirum reciproce ut $\Theta\nu$, IQ, rU, $g\Sigma$ etc., ex quo oritur aequalitas Rectangulorum cuiusvis Semiperimetri in Latera $\Theta\nu$, IQ, rU, $g\Sigma$ etc., videlicet aequalitas cuiuslibet Rectangulorum et Summae praedictae. Problema itaque inveniendi Superficiem Hemicylindri *scaleni* aequalem Summae laterum Coni iacentis aut erecti in arculos Baseos est reapse *indeterminatum*, quum per innumeras Superficies Ellipsesque *similes*, tam quo ad integram Summam, quam quo ad partes proportionales, resolvi possit. Id autem commodi accidit in unica solutione a Pascalio tradita, quod latus Hemicylindri IQ determinatum suapte natura sit, utpote aequale *maximae* linearum XI, vel YI, et Semicircumferentia Baseos $\delta I\beta$ par sit toti Circumferentiae IO Circuli dati, nec ulteriori reductione sit opus (93).

18. Hoc ipsum evincitur etiam ope Formulae initio positae. Dato enim Circulo $NSAM$ (Fig. 23.), et puncto X in eius plano, vel Y in sublimi, descriptoque Semicirculo CAL, ac quotlibuerit concentricis Semicirculis BGE, DHF etc. interioribus, vel exterioribus, erit Superficies Hemicylindrica *scalena*, in iisdem conditionibus ac in §. 1°., cuius Basis CAL, Latus AK, Altitudo KU, expressa per $\int P\Pi . \sqrt{AK^2 - \frac{P\Delta^2}{PN^2} . AU^2}$ $= \int \frac{NP}{NO} . OS \sqrt{AK^2 - \frac{O\Lambda^2}{ON^2} . AU^2} = \int \frac{NP}{NQ} . QR \sqrt{AK^2 - \frac{Q\Omega^2}{QN^2} . AU^2}$ etc., dum ceteri Hemicylindri eandem habeant obliquitatem, et altitudinem, eodemque gaudeant latere AK. Quaevis igitur earum Formularum eligatur, aequalis erit $\int SV \sqrt{XA^2 - 2XZ . AT}$. Idem dicendum de

$\int SV$

$\int SV\sqrt{YA^2 - 2XZ.AT}$, quam brevitatis caussa praetermittere liceat. Quae omnia facillima sunt si consulantur §§[i]. 2[us]. ac 13[us]. Prima hypothesis, in qua $P\Pi = SV$, simplicior est, et Theorema Pascalii suppeditat. Secunda praebet $\frac{NP}{NO} . AK = XA$; tertia $\frac{NP}{NQ} . AK = XA$ etc. etc., quod indicat augeri, aut minui debere Hemicylindrorum *isoperimetricorum* latera reciproce ut Basium radii, quemadmodum supra. Lateribus autem in ea proportione reciproca auctis, vel diminutis, augentur quoque vel minuuntur AU in eâdem ratione propter triangula similia, quod alteram conditionem Formularum adimplet. Namque prima hypothesis iubet esse $AU = \sqrt{2XZ.AN}$; secunda vult $\frac{NP}{NO} . AU = \sqrt{2XZ.AN}$; tertia petit $\frac{NP}{NQ} . AU = \sqrt{2XZ.AN}$, et sic de ceteris in infinitum.

19. Accedit pulcherrima contemplatio, quae docet quomodo disponi possint in Plano, vel Cono iacente, omnia latera cuiusvis Coni erecti *scaleni*. Ea, quae de *focis vicariis* in §§. 13[io]. et 14[to]. disserui, ad hoc inveniendum veluti manu ducunt. Sit enim, uti superius in Fig. 21., vertex Y Coni *obliqui*, et Π *focus* eius *vicarius*. Latera CY, AY, quae sunt *maximum* et *minimum* in Superficie Coni, ita producantur, ut $CT = C\Pi$, $AS = A\Pi$; quod facillime consequemur, quum recta coniuncta TS parallela evadat alteri $C\Pi$ propter $CY : AY :: C\Pi : A\Pi :: CT : AS$ ex constructione. Systema duorum Conorum *similium* oppositorum ad eundem verticem Y, quorum Triangula CYA, TYS sint in Plano ad Bases parallelas normali, latera habebit singula aequalia singulis rectis a puncto Π ad Circumferentiam $ABCD$ emissis. Nam ducto ubilibet latere VYD, iunctâque ΠD, est $YD : \Pi D :: YA : A\Pi :: YA : AS :: YD : DV$, et ideo $DV = \Pi D$ etc. Nunc a puncto T ducatur $T\Omega$ parallela ad YA, fiatque cum diametro $C\Omega$ Circulus in eodem plano Circuli dati $CDAB$. Conus ille *scalenus*, qui pro basi habeat descriptum Circulum $C\Omega$, pro vertice punctum T, pro altitudine perpendicularem TZ, latera singula habebit aequalia singulis rectis homologis, quae a puncto Π ad Circumferentiam Circuli $ABCD$ emittantur. Exempli gratia erit $T\Phi = \Pi B$, $T\Upsilon = \Pi B'$, atque idem dicendum de innumeris rectis ad extrema chordarum a puncto contactus C eductarum, et *similes* arcus secantium. Et revera latera huius Coni aequalia sunt (singula singulis homologis) Summis laterum Conorum ad verticem Y oppositorum, pro-

pter

pter similitudinem trium Conorum $C\Upsilon\Omega$, CYA, TYS, et $T\Omega = AY + YS$. Constructio itaque ad resolvendum Problema istud, tam directum, quam inversum, hoc modo poterit exornari. Detur Conus quilibet *scalenus* $EABCD$ (Fig. 24.). In eodem Baseos plano sitae supponantur rectae EC, EA, aequales *maximo*, ac *minimo* laterum; adeo, ut EF in ipso plano posita repraesentet altitudinem Coni. Secetur deinde $CG = CE$, et $GH = EA$, atque diametro CH Circulus $HICK$ describatur, solutumque erit Problema. Rectae nimirum a reperto puncto G ductae ad inventam Circumferentiam $HICK$ pares sunt Lateribus singulis Coni dati. Pascalius casum unicum et facillimum huiusce universalis Problematis solutum dedit (94), dum scilicet Conus datus $CBADL$ *minimum* LA suorum laterum habeat altitudini aequale. Singulari hoc in casu, si eadem repetatur constructio $CM = CL$, $MN = AL$, erit $CA^2 = CL^2 - LA^2 = CM^2 - MN^2 = CN^2 + 2CN.NM$, quod mirum in modum cum Pascalio consentit. Nunc detur vicissim Circulus $HICK$, punctumque G, a quo rectae emittantur ad eius Peripheriam, ac quaeratur Conus latera habens aequalia rectis illis in plano iacentibus. Problema hoc inversum est equidem *indeterminatum*, quum ex adverso directum unius *determinatae* resolutionis sit capax (95). Inter GC, GH sumatur $G\beta$ media harmonica proportionalis, qua bifariam secta in Ψ, describatur centro Ψ Semicirculus $\beta\omega G$. Rursus centro C, radio CG, descriptus sit arcus Circuli indefinitus GSU. Ducatur tandem quaelibet recta CS, secans Semicirculum in ν, arcum in S; iunctaeque νH parallela sit $S\Sigma$. Conus ille, qui pro basi habeat Circulum Diametri $C\Sigma$, latus *maximum* SC, *minimum* $S\Sigma$, verticem S, altitudinem SQ, erit unus quaesitorum. Per doctrinam etenim Galilaei $CG : GH :: C\nu : \nu H :: CS : S\Sigma$ propter parallelas. Sed $CS = CG$ ex constructione. Igitur et $S\Sigma = GH$. Recta autem CS secat Semicirculum ipsum etiam in alio puncto P, et ideo ducta quoque SY parallela ad PH, orietur Conus alter basim habens Circulum diametri CY, eundem verticem, eandem altitudinem, ac eadem latera cum priore, quum evidenter sit $SY = S\Sigma$. Idem arguendum de recta $C\omega E$ etc. etc., quae praebet alios duos Conos CEA, CEX gaudentes communi vertice, et altitudine, atque iisdem lateribus, sed tamen insistentibus diverso Circulo, uno nimirum diametri CA, altero diametri CX. Coni igitur tot exsistunt innumeri parilateri *scaleni*, quot innumera puncta exstant in arcu GR a tangente CDR definito, quorum

quilibet

quilibet suum comitem habet cum eodem vertice parilaterum Conum aeque altum, sed Circulo maiori insistentem, excepto unico Cono CRT, cuius *maximum* latus est tangens CDR, et *minimum* RT confunditur cum ipsius altitudine (96), qui comite caret. Nullus autem horumce Conorum sine numero insistere unquam potest Circulo aequali dato $HICK$, qui Basis est Coni iacentis, cuius apex in puncto G; sed omnes pro Basi maiorem Circulum habent. Ea vero lege progressio Basium procedit, ut inter duos *limites* definitos comprehendatur, *maximum* nempe Circulum diametri $GC + GH = CZ$, *minimum* Circulum diametri $CG - GH = CH$, videlicet Circulum datum. Circulus ille *maximus* Basis est alterius Coni iacentis parilateri quo ad iacentem datum, cuius Basis est Circulus *minimus*, qui duo Coni iacentes communem verticem habent G, limitesque sunt Conorum erectorum sine numero, qui ultra limites istos progredi nequeunt. Primus Conorum iacentium verticem habet intra Basim, secundus extra; et quod ii sint vere parilateri, confirmant praemissa in §. 10mo. Si enim ducantur quaelibet rectae GV, GI etc., et βV, βI etc., quibus postremis parallelae sint $G\Phi$, $G\Theta$, erunt arcus $Z\Phi$, $Z\Theta$ etc. similes arcubus HV, HI etc., quum sit ex constructione $C\beta : \beta H :: CG : GH = GZ$. Ergo $GZ = GH : G\Phi :: \beta H : \beta V :: GH : GV$, $GZ = GH : G\Theta :: \beta H : \beta I :: GH : GI$ etc., nimirum, $G\Phi = GV$, $G\Theta = GI$ etc. (97). Hactenus explicata arguendi methodus de affectionibus puncti G positi extra Circumferentiam $HICK$ convenit etiam puncto G intra Circumferentiam $Z\Phi\Theta C$, ita, ut nullum aliud discrimen intersit, nisi quod innumeri Coni parilateri, eorumque Bases ab iisdem *limitibus* determinatae inverso ordine progrediantur.

20. Corollaria quamplurima consequuntur, quae saltem obiter adnotasse iuvabit. Primum praecipuumque est Problemata Summae laterum in arculos baseos Coni *scaleni*, et Summae rectarum in arculos Peripheriae circularis dum emittantur a puncto in eodem cum ipsa plano iacente, talem tantamque habere inter se cognationem, ut sint unum et idem Problema. Aut Conus itaque detur (Fig. 21.) $ABCDY'$, cuius basis $ABCD$, altitudo $Y'X'$, aut rectae dentur emissae a puncto Π' ad Circumferentiam eiusdem Circuli, dummodo Π' sit occursus diametri CA productae, et $Y'\Pi'$ perpendicularis ad $Y'O'$, quae bisecet angulum $CY'A$ (98), unicae formulae et expressioni non modo, verum etiam eidem Ellipsi subiicitur Problematis

blematis resolutio. Si etenim quo ad punctum Π' Problemati satisfaciat Hemicylindrica superficies $FCNIGH$, ubi latus $CG = C\Pi'$, secto hoc latere CG in M ita, ut $CM = C\Gamma'$, ductoque plano QMP Basi parallelo, aeque satisfacit superficies Hemicylindrica $FCNQMP$ Problemati in Cono, nullaque expressio dispar, nec nova unquam difficultas exsurgit. Proportionalis etiam sectio superficiei Semicylindricae hac arte poterit permutari, nimirum, dato Cono $\Omega\Phi C\Gamma$ altitudinis TZ, et reperto puncto Π iuxta §. 19um. ac Circulo $ABCD$, Superficies illa Hemicylindrica $FCNIGH$ tali adamussim latere praedita, ut $CG = \Pi C$, Problema ipsum resolvet quo ad punctum alterum T dum latus idem CG ita producatur in Ξ, ut $CA : C\Omega :: CG : C\Xi$, quum parilateri sint Conus erectus et iacens, et Summae laterum in arculos Basium proportionem habeant diametrorum earundem. Quae methodus viam sternit ad allam primum a Robervallio explicatam (99) in resolutionem Problematis inversi, quo petitur Summa rectarum in arculos Circuli *datae* Superficiei Semicylindricae aequalis. Siquidem Auctor ille, Cylindro dato *scaleno* $AEDB$ (Fig. 25.), Conum instituit pariter *scalenum* CFG, qui latus *maximum* habeat FC aequale axi seu lateri Cylindri, et *minimum* FG aequale altitudini Coni et Cylindri. Quo facto, inter datas CG, CB mediam adsignat geometrice proportionalem CH, quae diameter erit Baseos alterius Coni *similis* CMH, cuius Summa productorum e lateribus in arculos Baseos aequabit medietatem Superficiei dati Cylindri (100). Praemissa etenim docent Summam etc. in Cono FCG esse ad hemicylindricam Superficiem $AEFC$ veluti CG ad CB, nimirum ex constructione CG^2 ad CH^2, scilicet Summae etc. in eodem Cono FCG ad Summam etc. in Cono MCH, propter eorum similitudinem. Problema hoc autem inversum universalius etiam tractari poterit si Conos simul erectos et iacentes contemplari libuerit. Et revera, data Superficie Hemicylindri cuiusque $ABCDEF$ (Fig^a. 26.), in qua latus, vel axis, vel perpendicularium *maxima* DB, altitudo, aut perpendicularium *minima* DG, inscribatur primum in Semicirculo ABC Circulus pro diametro habens radium BH. Deinde in BH, si opus fuerit producta, secetur $BL = BD$; et dum arrideat fortuna, quae donet etiam $LH = DG$, erit Summa etc. rectarum a puncto L ad Circumferentiam $HOBR$ aequalis hemicylindricae Superficiei. Non favente autem fortuna, tum ope centrorum in B et H, atque intervallorum BD, DG, reperiatur punctum S; eritque in Cono,

qui

qui Basim habeat Circulum diametri BH, ac Triangulum BSH ipsi Basi normale, Summa laterum etc. aequalis datae hemicylindricae Superficiei. In aperto est locum esse huic *directae* Problematis resolutioni donec Superficies innumerae hemicylindricae, parilaterae, et eâdem Basi gaudentes, sed diversimode inclinatae, uti in T, U etc. non pervenerint ad altitudinem minorem recta data HL. Quod statim atque accidat, nullus Conus erectus, nec iacens, in data Basi $HOBR$ Problemati satisfaciet. Limes erit Cylindri altitudo $V\Gamma = LH$, in quo faustissimo casu superius iam dicto Problema resolvitur a Cono iacente, cuius vertex in L. Alterum limitem nemo non videt in Hemicylindro recto $B\Sigma$, cui respondet Conus pariter rectus $B\Theta H$, axem habens $\Theta\Lambda$ insistentem centro Λ Circuli dati. Inter hos limites datos Θ, V quaevis Hemisuperficies Cylindrica quocumque modo inclinata, uti $BU\Delta$, Conum praebet BXH facillime definiendum, qualem Problema requirit. Qui Conus nullo etiam labore, si Geometrae placeat, converti potest in Conum iacentem, eâdem manente Summa laterum innumerorum in arculos Baseos. Hoc ut fiat, sit ex. gr. Conus erectus BSH convertendus in Conum iacentem. Secetur primum $LI = SH = DG$, quo facto Circulus describatur super diametrum BI, vel menti descriptus obversetur. Media sit geometrica proportionalis BK inter BI et BH; ac super diametrum BK Circulus alter insistat. Denique sit $BI:IL::BK:KM$, repertusque erit Conus quaesitus, Basim habens in Circulo BK, verticem in puncto M. Est quippe ex praemissis Conus iacens Baseos BI, verticis L, parilaterus quo ad Conum erectum BSH. Summa igitur etc. in BSH ad Summam in BLI uti BH ad BI, sive BK^2 : BI^2, vel, propter similitudinem Conorum iacentium ex constructione, uti Summa in BMK ad Summam in BLI. Methodus ipsa perducit ad Problema inversum resolvendum traiecto quoque limite V, quemadmodum in Superficie data semicylindrica BYZ. Aut enim Conus iacens desideratur, aut Conus erectus Summam laterum habens in arculos etc. parem hemicylindricae Superficiei. Primum consequimur ope $L\Phi = YZ$, processusque geometrici, qui ad unguem consonet cum superius adhibito pro puncto I. Obtinetur secundum eodem adamussim artificio, quo usus iam fuit Robervallius, videlicet invento puncto Ψ ita, ut $ZB:B\Psi:BH \div$, et erecta perpendiculari $\Psi\Xi$, quae Conum quaesitum suppeditabit habentem pro Basi Circulum diametri $B\Psi$, *maximum* latus $B\Xi$, et *minimum* vel altitudinem

nem $\Xi\Psi$. Sed innumeri alii Coni eodem modo Problema resolvent. Namque inter Y et L ex §°. praecedente innumeri continentur parilateri Coni, quorum unus, ex. gr. $\nu B\lambda$, disposita $\nu\lambda = YZ$. Deinde sit talis $B\theta$, ut $B\lambda : B\theta : BH \div$; atque educta $\theta\mu$ parallela ad $\lambda\nu$, orietur Conus $B\mu\theta$, qui super Circulum diametri $B\theta$ insistit, et lateribus gaudet *maximo* ac *minimo* $B\mu$, $\mu\theta$, et aeque ac alter $B\Xi\Psi$ habet Summam laterum omnium in arculos Baseos aequalem datae semicylindricae Superficiei $CBAY$. Haec vero resolutionum Problematis abundantia Conis quoque superius consideratis BSH, BXH etc. aptari poterat si Geometrae placuisset solutionem directam, quae praesto est, indirectis, minusque obviis resolutionibus locupletare. Quae omnia confirmant aut indirecta methodo Problema inversum, de quo nunc loquimur, plenissimam solutionem semper acquirere ad Superficiem Hemicylindri *scaleni* vertendam in Summam etc. spectantem ad Conum iacentem, vel erectum, et in hoc casu postremo ad libitum Geometrarum eligi posse Conum compositum iuxta morem Robervallii et Pascalii, videlicet ad typum eorum BTH, $B\Xi\Psi$ etc., qui *minimum* laterum habeant Plano baseos normale. Nec de partibus proportionalibus disputandum, quum de earum aequalitate, ducto quolibet radio HR', statim constet ob arcum $HO = AR'$, et arcus similes HO, KQ, IP etc. a recta BO abscissos. Conversio demum, quam Pascalius ipse subiungit (101), Coni iacentis $GHICK$ (Fig. 24.) parilateri respectu Coni erecti CRT in duos Conos erectos, ac simul parilateros, est adeo facilis, ut solo circini ductu derivetur. Sit namque perpendicularis $G\Lambda$ cuiuslibet longitudinis, et centro C, radio $C\Lambda$ arcus Circuli describatur, donec altera perpendicularis TR producta ipsi occurrat in Ω. Erunt duo Coni $C\Lambda H$, $C\Omega T$ parilateri. Latera etenim *maxima* $C\Lambda$, $C\Omega$ aequantur inter se ex constructione, *minima* vero ΛH, ΩT ex Elementis, quum $C\Lambda^2 - \Lambda H^2 = CG^2 - GH^2 = CR^2 - RT^2 = C\Omega^2 - \Omega T^2$, et ideo $\Lambda H = \Omega T$. Quae constructio facillima cum ea Pascalii concurrit, qui iubet ita produci TR, ut $R\Omega^2 + 2TR . R\Omega = G\Lambda^2$. Palam etenim fit esse $\Omega T^2 - RT^2 = C\Omega^2 - CR^2 = C\Lambda^2 - CG^2 = G\Lambda^2$ (102).

21. Ad theoriae complementum, atque ad arctiori foedere coniungendam analogiam Cylindri et Coni *scaleni* non ingratum erit Ellipsim illam, quam Pascalius in solo Cylindro contemplabatur, in Cono quoque experiri. Detur ergo quilibet Conus obliquus ABC (Fig. 27.), et in mentem

revocata doctrina, de qua mentio in §°. 13°., dubio caret Summam productorum e Coni lateribus in arculos Baseos *BECD* parem esse Rectangulo ex latere *maximo* *AB* in perimetrum Ellipseos, quae habeat Axem transversum aequalem *BC* diametro Baseos, et Coniugatum, cui sit ipse *BC* in ratione *maximi* lateris *AB* ad *AC* *minimum* latus. Omnis itaque cura in eo reponenda est, quod Ellipsis ipsamet, *specie*, et *magnitudine*, in Cono dato ope Plani secantis oriatur. Discitur vero a Conicorum Elementis quod ducta a vertice *A* recta quavis *AF* extra Conum, sed in plano Trianguli per axem *BAC* ad Basim normali, sit ea Ellipsium innumerarum, quae generetur a Plano ad Triangulum ipsum *BAC* perpendiculari, ac transeunte per rectam *GH* parallelam *AF*, talis *speciei*, ut quadratum unius Axis in plano iacentis *BAC* ad quadratum alterius rationem habeat quadrati *AF* ad rectangulum *BF* in *FC*, sive $AF^2 : IF^2 - IC^2$, posito in puncto *I* centro Baseos. Tota res igitur versatur in emittenda *AF* ita, ut $AF^2 : IF^2 - IC^2 :: AB^2 : AC^2$. Quod Problema *planum* est, semperque geminam solutionem recipiens in Cono *scaleno*, atque ab universaliore pendet et celeberrimo in Antiquorum Analysi (103). Problema veterum Geometrarum hoc erat „ invenire *Locum* geometricum, in quo disponantur innumera puncta, ut *F*, *F'* etc., a quorum quolibet ductis rectis *AF*, *FI*, *AF'*, *F'I* etc. ad duo puncta data *A*, *I*, sit semper quadratum prioris *AF* ad differentiam quadratorum posterioris *FI* et rectae datae *CI*, vel $AF'^2 : FI'^2 - CI^2$ etc. in data ratione constante „ (104). Hunc *Locum* geometricum Circumferentiam circuli esse, cuius centrum in recta *AIM*, liquido constat; ac post Apollonium, et Pappum Petrus Fermatius, Franciscus Schootenius, ac praecipue Robertus Simsonius eius constructionem dederunt (105). Gemina igitur intersectio illius Circumferentiae ac rectae *BC* determinat puncta *F*, *F'*, rectasque *AF*, *AF'*, quibus parallelae ductae *GH*, *G'H'* Ellipses suppeditant *speciei* quaesitae, dummodo ratio illa constans eligatur $AB^2 : AC^2$. Sed viam sequens a Fermatio et Simsonio diversam, hac methodo nova, tametsi disparis elegantiae, meam constructionem instituo. Sit *AO* perpendicularis ad *BC*, sitque proportio geometrica $AC^2 + CB^2 - AB^2 : AC^2 + CB^2 :: CO : CQ$, datumque erit punctum *Q*. Erigatur deinde *CN* perpendicularis ad *BC*, et secta $OR = CO$, reperiatur *BS* media geometrica proportionalis inter *CB*, *BR*. Denique sit $BS : CA : CN \div$, ac punctum *N* datum erit; et facto centro in *Q*, radio

QN,

QN, ope circini puncta quaesita F, F' determinabuntur. Quin imo et *Locus* omnium punctorum, tametsi ad institutum meum non pertineat, ex adhibita methodo enucleatur. Bifariam est enim secta FF' in Q, unde educta ad FF' perpendiculari, haec occurret in puncto T rectae AIM, quod centrum erit Circumferentiae quaesitae $\Sigma F'ZFU$ etc., intervallo TF describendae. Circumferentia ista in Lineam rectam, veluti in Problemate Galilaeano, unico casu convertitur tum, quum ratio constans fuerit aequalitatis, nimirum $AB = AC$, scilicet in Cono *recto*; quae hypothesis reddit QT parallelam AIM, et idcirco centrum T abit in infinitum. Quod ipsum cuivis mea constructio suadet, quia punctum R cadit in B, ideoque Media BS evanescit ex proprietatibus Circuli (106), CN evadit infinite-magna, et AF, AF' aequidistantes BC, sive puncta quaesita F, F' in infinito merguntur. Ut Ellipses autem *specie* nunc datae GH, $G'H'$ in Ellipses etiam *magnitudine* datas vertantur admodum facile est. Sectis enim AK et AY aequalibus diametro Baseos BC, ductisque KL parallela ad AB, et $Y\Theta$ ad AC, ac LV parallela ad AF, et ΘH ad AF', ac demum secto Cono per rectas VL, $H\Theta$ planis normalibus ad ABC, duae Ellipses generabuntur, quarum Axes transversi pares sint diametro BC, quae ad Coniugatos proportionem habebit $AB:AC$ (107). Nec modo Ellipses geminae erunt *identicae*, sed adeo dispositae, ut Axes maiores in occursu X praebeant $VX = XH$, et $\Theta X = XL$, semperque parallelas inter se rectas vel iunctas vel iungendas VH, ΘL (108). Summa igitur Laterum Coni ABC in arculos Baseos $BDCE$ aequalis est tam Rectangulo Lateris *maximi* AB in Perimetrum Ellipseos LV, quam Rectangulo eiusdem AB in Perimetrum Ellipseos alterius ΘH in Cono ipsomet genitarum, uti propositum mihi fuerat investigare.

22. Neque idem deficit argumentum in tractatione Conorum iacentium, sed imo praeter spem venustius adparet, miramque detegit Geometriae fidem et veritatem. Dum etenim Conus *scalenus* BAC, ipsa Basi semper manente, ipsâque sarta tecta proportione $AB:AC$ Laterum *maximi* et *minimi*, eo usque inclinetur magis ad mentem §^{i}. 14^{ti}., ut tandem desinat in iacentem, qualem ostendit Fig^{a}. 28., basim eandem habentem cum praecedente $BCDE$, verticem A, latera *maximum* ac *minimum* AB, AC, nemo non videt eadem symptomata in hoc reperiri quemadmodum in erecto. Circuli enim innumeri aequidistantes Basi in Cono erecto, et ad ver-

 ticem

ticem opposito, repraesentantur in iacente, et opposito, a Circulis innumeris, quorum Peripheriae tangant interius utraque latera *MAU*, *NAV*; centraque omnium sunt aeque disposita in Axe *AI*, donec oporteat producto. Angulus laterum Circumferentias innumeras contingentium est ille, qui Cosinu gaudeat $= \frac{IO}{AI} = \frac{CB}{AB+AC}$, nimirum diametro baseos per summam laterum *maximi* ac *minimi* divisae, ideoque *datus*. Arcus a punctis contactuum determinati, veluti ex una parte *MDN*, *OCP*, *QFR*, *SIT*, *VLU* etc., ex altera *MEN*, *OBP*, *QGR*, *SFT*, *VKU* etc., sunt, ut in Cono erecto, *similes* inter se per Euclidem. Universa latera, uti *ΩAΣ* etc., *VAN*, proportionaliter dividuntur, non dissimiliter a Cono erecto, in punctis occursuum cum innumeris Circumferentiis, quemadmodum Axis a Circumferentiarum centris, ex Elementis; et idcirco $A\Sigma : A\Phi :: AN : AP ::$ $A\Psi : A\Theta$, ac sic de ceteris in infinitum (109). Ellipses itaque *identicae* *VXL*, *HXΘ* in Fig^a. 27., quae aucta semper obliquitate Coni *ABC* invicem accedunt, et Cono erecto in iacentem verso unica Ellipsis evadunt, istam indicant adeo positam in Cono iacente, ut gaudens eodem Axe transverso *BC*, et eodem coniugato, scilicet, qui ad *BC* rationem habeat ex hypothesi parem rationi *datae* $AC : AB$, inscripta sit in angulo *OAP*, et ideo tangat latera *OA*, *PA* *positione* data. Qui situs ex Elementis Conicorum facillime determinatus (110) Ellipsin quaesitam praebet in Cono iacente et *specie* et *magnitudine* et *positione* datam *ωνθμ*, ac sine subsidio Cylindri *scaleni* suppeditat directe Summam rectarum innumerarum *AC*, *AP*, *AΦ*, *AB*, *AO* etc. in arculos Peripheriae circularis *CDBE* aequalem Rectangulo *AB* in Perimetrum *ωνθμ* Ellipseos dudum descriptae. Modus iste considerandi affectiones Coni cuiusque iacentis *analogas* illis erecti Coni simplicior equidem est in Cylindro, de quo saltem pauca obiter delibabo. Cylinder itaque *rectus* gradatim a *rectitudine* declinans, iisdem tamen manentibus Circulo baseos *ΠSΓK* (Fig^a. 29.), et axe *ΛΘ*, seu latere *ΓA*, suos innumeros aequales Circulos servat, quorum centra in axe disposita sunt etiam quum in eodem tandem iaceant plano, quo casu eorum Circumferentiae tangunt extrema latera parallela in *C*, *V*, *X*, *Z*, *Π* etc. *A*, *T*, *U*, *Y*, *Γ* etc. Haec latera, uti et alia quaelibet *LS*, *BK* etc., ac ipse axis *ΘΛ*, proportionaliter et aequaliter dividuntur: illa in occursu Peripheriarum *ABCL*, *TEVN*, *UFXP*, *YHZR*, *ΓKΠS* etc., iste a centris Circu-

lorum

lorum eorundem, quemadmodum in Cylindro *recto* et *scaleno*. Ellipsis autem Cylindri erecti orta a plano secante lateribus et axi normali, semper fit recta Linea geminata ΦΔΨ, lateribus item et axi perpendicularis in Cylindro iacente (111). Sed quomodocumque Superficies *recta* Cylindrica *scalena* fiat, habet limitem suae mensurae superficiem duplam Ungulae Cylindri *recti*, cuius altitudo eadem sit cum latere vel axe Cylindri, scilicet, habet pro limite aream Rectanguli *ΛΓΠC* geminatam. Minuitur ergo Superficies Cylindri *recti* dum in *scalenam* vertatur, et eo magis, quo magis excrescat obliquitas Cylindri, sed minui nunquam potest ultra mensuram *datam* duplae Areae Ungularis; qui postremus Superficiei valor tum obtinetur, quum ea iaceat in Plano. Terminus ipse sive ultimus limes diminutae Superficiei ad integram datam Superficiem Cylindricam *rectam* proportione ipsa gaudet Diametri ad Semicircumferentiam Circuli, vel Radii ad Quadrantem (112); quod est Theorema non iniucundum. Insuper a Cylindro iacente nova methodus dimensionis Ungulae eruitur. Ducta enim tangente $D\Gamma$, et ad istam normali $M\nu$, necnon DI perpendiculari ad diametrum UX, et coniuncto radio DH, manifestum adparet $M\nu$ proportionalem semper esse sinui-recto DI propter similia Triangula orthogonia $DM\nu$, HDI, atque ita proportionalem, ut $M\nu : DI :: \Pi X : HX$, ideoque $DMQ\mu$ idem esse ac Ungulae elementum, Ungulamque totam, cuius altitudo ΠX, aequalem Rectangulo $\Pi\Gamma UX$: tantae ac insperatae foecunditatis est Cylindri iacentis consideratio, quae prima fronte sterilissima videbatur.

SECTIO

SECTIO II^a.

DE FORMVLIS INTEGRALIVM A PASCALI THEOREMATE DERIVATIS.

23. Sepositis iis, quae potius ornamenta sunt quam fundamenta Pascalii doctrinae, eius usus in Calculo Integrali explicandus accedit, a nemine, quod sciam, Geometrarum ad hanc usque diem patefactus. Tota res paucis absolvitur: directe quidem in Integralibus detegendis, quae ab Ellipseos perimetro mensuram recipiant; indirecte, sed non minus clare, dum differentialium Integratio dependeat a perimetro Hyperbolae. Commodum autem perhibent eximium universae illae Formulae differentiales, quarum *summa* obtineatur ope integrae Ellipseos perimetri, vel eius partium determinatarum, praesertim post traditam a Leonardo Eulero *rectificationem* illius Conicae Curvae, quam complectitur Series elegantissima, et maxime convergens, in *Novis Commentariis Academiae Petropolitanae* (113). Quae Series, tametsi non ad similitudinem Tabularum Trigonometricarum et Logarithmicarum, inservientium proximae *rectificationi* arcuum quorumlibet Circuli et Parabolae Apollonianae, traduci possit ad *rectificandos* arcus Ellipseos, *data* horum abscissa vel ordinata, nihilominus usu non caret in Calculo Integrali, si suppetias praesertim petamus a methodo partium proportionalium, sive a regulis, quas vocant *Interpolationum*. Quum etenim elementa perimetri Ellipseos *datae* proportionem sequantur ex doctrina Pascalii rectarum a puncto excentrico *dato* ductarum ad *datam* Circuli peripheriam, hoc principio non difficiliter cum Euleri Serie coniuncto condendae Tabulae Ellipticae inniterentur.

24. Transitus ab Ellipsi ad Hyperbolam familiaris iamdudum est Analytis (114). Eâdem penitus arte, qua a Circulo vel Ellipsi aequilatera (Fig. 30.) $IGHF$, cuius aequatio sit $y^2 = a^2 - x^2$, factis $OI = a = OF$, $OL = x$, $LN = y$ invicem perpendicularibus, et centro O, gradus

dus sit ad Hyperbolam pariter aequilateram ad eosdem Axes AOB, UOV relatam, ideoque concentricam Circulo, dum fingatur tantummodo permutata *species* x in $x\sqrt{-1}$, unde aequatio data vertatur in alteram $y^2 = a^2 + x^2$, respondentem Hyperbolae $\Omega I\Sigma\Phi H\Psi$ coordinatas habenti $OL = x$, $LR = y$, non dissimiliter Ellipsis quaelibet *scalena* $CGDF$ vel $EGKF$, aequatione distincta $\frac{a^2}{b^2} \cdot y^2 = a^2 - x^2$, dum OF fuerit $= a$, OC vel $OE = b$, $OL = x$, LM sive $LT = y$, facto duntaxat $x = x\sqrt{-1}$ evadit Hyperbola *scalena* concentrica $\Lambda C\Delta\Pi D\Gamma$, seu $ZE\Xi\Theta K\vartheta$, iisdem Axibus praedita, sed uti in Schemate positis, ac aequatione gaudens $\frac{a^2}{b^2} \cdot y^2 = a^2 + x^2$, quae respicit abscissas $OL = x$, et ordinatas LS sive $LP = y$. Igitur quaevis expressio analytica composita constantibus a, b etc. ac variabilibus x, dx, quae referatur ad arcum Ellipseos CM, IN, ET, facile traducitur (consideratione tamen habita ad solas Functiones τῦ x, dx aequales y, dy) in arcum Hyperbolae *sociae* CS, IR, EP, et vicissim, ope artificii superius memorati, et intimae analogiae ac societatis inter has Curvas, quam post *harmoniam* resolutionis Aequationum tertii gradus subodoratam a Francisco Vieta, primus omnium in areis Sectorum detexit Rogerus Cotesius (115). Ita ex. gr. quum a Theoremate Pascalii iuxta §um. 15um. consequatur per theoriam Ungulae arcus Circuli infinite-parvus $\mu\nu = \frac{OI}{\mu a} \cdot a\beta$, scilicet $\sqrt{\frac{a^2dx^2}{a^2-x^2}} = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{x^2dx^2}{a^2-x^2}}$, erit arcus Hyperbolae aequilaterae infinite-parvus $\delta s = \sqrt{dx^2 + \frac{(x\sqrt{-1})^2(dx\sqrt{-1})^2}{a^2-(x\sqrt{-1})^2}} = \sqrt{dx^2 + \frac{x^2dx^2}{a^2+x^2}} = \sqrt{\frac{a^2dx^2+2x^2dx^2}{a^2+x^2}}$. Dum itaque elementum Peripheriae circularis exprimitur ope Formulae $ds = dx\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) = dx\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$, evidens est quod exprimi debeat elementum Perimetri hyperbolae aequilaterae per Formulam alteram $ds' = dx\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) = dx\left(\frac{\sqrt{a^2+2x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$, quae et communem originem, et cognationem cum priore, huius praesertim methodi adiumento, apertissime ac procul dubio patefacit."

. 116

patefacit (116). Inferius autem Pascalio duce ad §os. 33ium. 38vum. ac 39um. ostendam melioribus etiam auspiciis conversionem expressionum earum Curvarum obtineri facto uno Semiaxium velnti $a = a\sqrt{-1}$. Universaliter enim ab Aequatione $\frac{a^2}{b^2} y^2 = a^2 - x^2$ altera exsurgit $\frac{-a^2}{b^2} y^2 = -a^2 - x^2$, sive $\frac{a^2}{b^2} y^2 = a^2 + x^2$, ad secundum Axem Hyperbolae, non secus ac supposito $b = b\sqrt{-1}$ oritur $\frac{a^2}{-b^2} y^2 = a^2 - x^2$ vel $\frac{a^2}{b^2} y^2 = x^2 - a^2$ ad primum Axem Hyperbolae eiusdem.

25. Pascalii inventum, quod potissimum continent §§i. 2us. 5us. ac 8vus. antecedentis Sectionis, sic algebraice transcribitur. Data sit circularis Circumferentia *AEFG*, centro *O* praedita (Fig. 31.), sitque punctum *B* in diametro *FA*, vel eius productione, a quo rectae innumerae *BD*, *BE* etc. ad Peripheriam emittantur. Vocatis radio $OA = a$, $BO = c$, $OC = x$, erit $DE = \frac{-a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ex §°. praecedente, et ex §°. 2° $BD = \sqrt{a^2 + c^2 - 2cx}$, ideoque

$$\int BD \,.\, DE \text{ etc.} = \int \frac{-dx \,.\, a\sqrt{a^2 + c^2 - 2cx}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = (c + a) \,.\, SM = (c - a) \,.$$

TP, qui arcus *similes SM*, *TP* ad Ellipses conicas pertineant, descriptas ac sectas legibus iam expositis in Ima. Sectione. Est igitur $\frac{a}{c + a}$.

$$\int \frac{-dx\sqrt{a^2 + c^2 - 2cx}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = SM, \text{ et } \frac{a}{c - a} \int \frac{-dx\sqrt{a^2 + c^2 - 2cx}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = TP,$$

quae duo Formulae caput sunt huiusce universae theoriae. Semiaxis transversus minoris Ellipseos *LKM* est $AM = 2a$, et Semiaxis coniugatus $AK = \left(\frac{c - a}{c + a}\right) 2a$: Semiaxis autem transversus maioris Ellipseos *similis NFP* est $AP = \left(\frac{c + a}{c - a}\right) 2a$, et vicissim Semiaxis coniugatus $AF = 2a$. Quum itaque Semiaxes homologi vel cognomines duarum Ellipsium *similium* sint in ratione $c - a : c + a$, nemo non videt esse $(c + a) SM = (c - a) TP$, ac propterea duplicem integrationem Formulae datae differentialis, nimirum $\int \frac{-dx \,.\, a\sqrt{a^2 + c^2 - 2cx}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, in unam eandemque resolvi. Quae singularis affectio dum admirationem excitavit aliquibus Analystis, ac praecipue Bougainvillio (117), nunc admirari potius liceat quanta facilitate detecta sit

atque

atque illustrata ope Syntheseos geometricae a Pascalii laboribus mutuatae. Nec difficultas oritur dum fuerit $c = a$, vel $c < a$. In primo etenim casu fit τὸ $\int \frac{-dx \cdot a\sqrt{2a^2 - 2ax}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2a \cdot MY$, ideoque algebraice integrabile, sive etiam $= o \cdot PV = o \cdot \infty$, qui valor indefinitus ut recte determinetur, ad *similitudinem* Ellipsium confugiendum est, ubi $MY : PV :: AK : AF :: o : 2a$, videlicet $o \cdot PV = 2a \cdot MY$, uti superius. Algebraicum autem Integrale norunt omnes, quum agatur de Differentiali $\frac{-dx \cdot a\sqrt{2a^2 - 2ax}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, vel $\frac{-dx \cdot a\sqrt{2a}}{\sqrt{a + x}}$, esse $4a^2 - 2a\sqrt{2a} \cdot \sqrt{a + x}$ (118); et idcirco MY non modo in hac hypothesi, sed universaliter ex Schemate apposito, parem fieri $2a - \sqrt{2a(a + x)}$, scilicet $AY = \sqrt{2a(a + x)} = \sqrt{AF \cdot FC} = ID$, quemadmodum constat ab Elementis. In altera vero hypothesi, quae punctum B' contemplatur intra dati Circuli $AEFG$ circumferentiam, nihil aliud oportet ex usitatis legibus Analyseos nisi mutatio τῦ $c - a$ in $a - c$.

26. Proderit interea paululum immorari in hac Formula meditanda, utpote quae complectatur universitatem argumentorum ad istam Calculi Integralis partem spectantium. Ac inprimis observandum est quod duce Pascalio ipsa formula unius dimensionis $\frac{a}{c + a}\int \frac{-dx\sqrt{a^2 + c^2 - 2cx}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ adeo servet *homogeneitatis* legem, tantoque nitore perducat ad sibi parem Arcum ellipticum SM, ut omnia graphice repraesentata sint in numero et mensura, et quid significet Formula, quid sibi velit, quo tendat, cuius Figurae geometricae filia sit, quomodo inter Circuli proprietates elementares sit numeranda, et quanam ratione novum foedus aperiat inter Circulum et Ellipsim subiectum oculis videatur, atque per gradus a rudimentis Geometriae profluat et adolescat percelebris illa expressio Analytica. Quod desideratum saepenumero, sed rarissime consequutum Algebrae Collectanea passim demonstrant (119). Accedit altera utilitas deducta ab aequalitatibus $AY = \sqrt{2a(a + x)}$, et $SY = \frac{KA}{AM} \cdot RY = \frac{c - a}{c + a} \cdot AD$

 =

$= \frac{c-a}{c+a} . \sqrt{2a(a-x)}$ propter Semicirculum *LFM*. Hi duo valores evidenter indicant ipsius Formulae *limites*, nimirum $x = \pm a$, ultra quos evadat *imaginaria*, quam impossibilitatem et denominator eiusdem Formulae, et constructio geometrica a Circulo *AEFG* derivata apte confirmant. Sed haec ipsa Formula primigenia rectificationis Ellipseos Conicae, quam plerique Calculi Integralis Scriptorum silentio praeterierunt, mirum in modum consentit cum ea, a qua Leonardus Eulerus nuperrime Seriem suam derivavit ad rectificandam Ellipsim, veluti in §°. 23^{io}. iam monui. Formula etenim Euleriana (120), longius a Differentiali et Integrali Calculo deducta, et ope *Loci* ad Parabolam concinnata (121), est pro Arcu elliptico $s = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int dz \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2) z}{1 - z^2}}$, suppositis a et b Semiaxibus. Revera, quidquid sit de constantibus, eandem formam habet cum mea antecedente expressio data ab Eulero; quod eo magis effulget cum ad *homogeneitatem* servandam fiat z, qui numerus est, $= \frac{z}{r}$, et r sit $= AD$ radio Circuli in Fig^a. 8^a. descripti, in quo $CB = a$ Semiaxi transverso, $CA = b$ Semiaxi coniugato Ellipseos datae, uti fusius in §°. 10mo. expositum. Tunc facta $CD = c$, Formula vertitur in $s = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dz}{r} \sqrt{\frac{2r^2 + 2c^2 - 4cz}{\frac{r^2 - z^2}{r^2}}} = \frac{1}{2} \int dz \sqrt{\frac{r^2 + c^2 - 2cz}{r^2 - z^2}}$, in qua τὸ dz negativum est ob hypothesin assumptam ab Eulero (122), et coefficiens $\frac{a}{c+a} = \frac{r}{c+r}$ ideo debet esse $\frac{1}{2}$, propterea quod in mea hypothesi Semiaxis transversus Ellipseos sit $= 2r$, dum in hypothesi Euleri $= c + r$, ex quo fit arcus Ellipsis Eulerianae $s = \frac{c+r}{2r} . \frac{r}{c+r} \int - dx \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - 2cx}{a^2 - x^2}}$ ex Ellipsium *similitudine*, nimirum coefficiens $= \frac{1}{2}$ prouti demonstrandum susceperam. Non modo igitur Formula Euleri adamussim congruit expressioni, quae oritur a Pascalii Theoremate, verum etiam non differt ab alia, quam Eulerus ipse tradiderat viginti quinque annos ante in *No-*

vis

vis Commentariis iisdem *Academiae Petropolitanae* quum agebat de Theoremate demonstrando Ioannis Bernoullii (123); adeo ut Pascalius, Bernoullius, et bis Eulerus dicendi sint eadem diversis temporibus ac diverso itinere facto prodidisse de perimetro Ellipseos Apollonianae.

27. Ceteris omnibus manentibus permutetur duntaxat initium abscissarum x in Formula $\frac{a}{c+a}\int\frac{-dx\sqrt{a^2+c^2-2cx}}{\sqrt{a^2-x^2}}$, ita ut sit $\frac{a^2+c^2}{2c}-x=z$; quod simplicissima constructione in Fig^a. 31ma. obtinetur si erecto radio OG normali ad diametrum FA, et iuncta BG, fiat angulus $OGQ=OBG$, et recta BQ bifariam secetur in H; namque hoc erit principium abscissarum z ex Euclide. Facili substitutione facta, consequitur $SM=\frac{a\sqrt{2c}}{c+a}\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c}z-z^2-\left(\frac{c^2-a^2}{2c}\right)^2}}$, sub qua forma Analystae expressionem universalissimam Differentialium ab Ellipseos arcu in *Summatione* pendentium comprehendunt. Veruntamen ut ad istam formam perveniant opus est, ut primum ab Ellipseos Aequatione elementum Arcus eius Curvae deducant, quo facto substitutionem operosissimam adhibent a Parabola mutuatam. Hanc equidem methodum sequutus est Alembertus (124), omnesque pene post eum Mathematicarum Institutionum Scriptores repetentes, inter quos sub manus praesertim habeo Bougainvillium, Riccatum, atque Cousinum (125). Incipiunt ab Aequatione $\frac{2a}{p}y^2=a^2-x^2$, et praesidio Calculi Differentialis inveniunt $\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2+\frac{p}{2a}x^2}$, atque ad Formulae istius transformationem ineundam substituunt $a^2-x^2+\frac{p}{2a}x^2=az$, ut tandem adipiscantur expressionem Analyticam consimilem illi, quam directe suppeditat Theorema Pascalii post permutatum tantummodo in eodem Axe abscissarum initium. Maclaurinus ipse, qui Alemberto praecessit in huius Formulae consideratione (126), prolixiore Synthesi *speciosa* usus est ad illam Formulam non modo integrandam, sed et alteram simplicissimam, quae in

in casu eiusdem singulari consistit per inferius dicenda, nimirum $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$; adeo ut, si recte comparationem instituere libeat, nullus dubito quin prima fronte de iisdem formulis heic agi vix credibile fuerit. Occurrit pariter in methodo Maclaurini substitutio variabilium per *Locum* Parabolicum $z = \frac{p^2}{a}$, necnon per Hyperbolicum $z = \frac{b^2}{x}$, sive $x = \frac{ab^2}{p^2}$; quae omnia evitantur dum ea Formula oriatur a Circuli Peripheria (127). Originem istam qui calleant statim vident quousque Formula

$$\frac{a\sqrt{2c}}{c+a}\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c}\cdot z - z^2 - \left(\frac{c^2-a^2}{2c}\right)^2}}$$

extendi possit in valore variabilis z quin impossibilitatem offendat, nempe ab HA ad HF, sive a *limite* $\frac{(c-a)^2}{2c}$ ad alterum *limitem* $\frac{(c+a)^2}{2c}$, videlicet, a tertia geometrica proportionali post $2OB$, BA usque ad alteram tertiam post $2OB$ et BF. Vident eâdem in Formula quanam ratione algebraicam integrationem recipiat unico casu $c=a$, vel puncti B cum A congruentis, quum Theorema Pascalii vertatur tunc in Ungulae semi-rectae superficiem geometrice quadrabilem super Hemicylindro Basim habente Semicirculum MFL, et idcirco ab A ad D debeat esse $\int\frac{AD \cdot DE}{AF}$ etc. $= MY$, seu $= AF - FD$ $= (2a) - \sqrt{2a(2a-z)}$, quae ultima expressio ad unguem est Integrale τὸ $\frac{a\sqrt{2a}}{2a}\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{2az-z^2}}$ sive $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{z}}\int\frac{dz}{\sqrt{2a-z}}$, quemadmodum constat ex Elementis Calculi infinite-parvorum, et cum §°. 25°. cohaeret. Vident denique coordinatas Ellipseos *rectificatricis* LOM a centro A numeratas ita exprimi posse $AY = FD = \sqrt{AF(HF-HC)} = \sqrt{2a\left(\frac{(c+a)^2}{2c} - z\right)}$, et $SY = \frac{c-a}{c+a} \cdot AD = \frac{c-a}{c+a}\sqrt{AF(HC-HA)} =$

$$\frac{c-a}{c+a}\sqrt{2a\left(-\frac{(c-a)^2}{2c} + z\right)}.$$

28. Elli-

28. Ellipsis, cui Formula praecipue referatur, Semiaxibus gaudet, uti dictum in §°. 25°., aequalibus $2a$, et $\frac{c-a}{c+a}.2a$. Accedit ad eiusdem Formulae integrationem Ellipsis altera *similis*, cuius Semiaxes sint $\frac{c+a}{c-a}.2a$, et $2a$: sed neutra harumce Curvarum commodum praebet quantum fortasse optari poterit ad summandam Formulam universalem $\frac{n}{m}.\frac{dz\sqrt{ez}}{\sqrt{fz-z^2-g^2}}$, utpote quae relata ad $\frac{a}{c+a}.\frac{dz\sqrt{2cz}}{\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c}z-z^2-\left(\frac{c^2-a^2}{2c}\right)^2}}$ videatur primo intuitu generalitatis inops, ac plena laboris in *constantium* instituenda comparatione. Huic tamen incommodo medicina paratur ab ipsa Pascalii doctrina, quae iuxta §. 18^{vum}. non unam vel duas duntaxat, sed innumeras Ellipses *similes* in promptu habet, commodioremque operi eligendam Analystis relinquit. Quicumque igitur comparationem respuat Formularum, quae tamen nec universalitatem offendit, nec adeo difficilis est, ut respui mereatur, utpote absoluta aequationibus $f=\frac{c^2+a^2}{c}$, $g=\frac{c^2-a^2}{2c}$ suppeditantibus $c=\frac{f}{2}+g$, $a=\frac{\sqrt{f^2-4g^2}}{2}$, nimirum praebentibus Semiaxes Ellipseos *directae* $2a=\sqrt{f^2-4g^2}$, et $\frac{c-a}{c+a}.2a=\left(\frac{f+2g-\sqrt{f^2-4g^2}}{f+2g+\sqrt{f^2-4g^2}}\right)\sqrt{f^2-4g^2}$, qui totam concludunt Figuram et constructionem, quaerat (si magis placeat) Ellipsim, *indirectam* quidem, sed commodiorem, ubi Semiaxis coniugatus sit $=g=\frac{c^2-a^2}{2c}=\frac{BZ}{2}$ dum a puncto B ducatur tangens Circuli BX, et a contactu X emittatur XZ ad diametrum perpendicularis. Erit itaque in nova Ellipsi $\lambda k\mu$, cuius Semiaxis minor $Ak=g=\frac{BZ}{2}$, Semiaxis ipse $\frac{c^2-a^2}{2c}$ ad Semiaxem minorem $\frac{c-a}{c+a}.2a$ prioris Ellipseos LKM ut $\frac{c^2-a^2}{2c}:\frac{c^2-a^2}{(c+a)^2}2a::\frac{(c+a)^2}{2c}:2a$,

et

et idcirco propter Ellipsim *similem* Semiaxis maior peraequabit $\frac{(c+a)^2}{2c}$ $= HF$ ex §°. 27mo. Qui valor oritur etiam ab Aequatione, quam tribuit Formulae *denominator*, nimirum $\left(\frac{c^2+a^2}{c}\right)v - v^2 - \left(\frac{c^2-a^2}{2c}\right)^2 = 0$: haec etenim more solito ordinatur et resolvitur in $v^2 - \left(\frac{c^2+a^2}{c}\right)v + \left(\frac{c^2+a^2}{2c}\right)^2 = a^2$, videlicet $v = \frac{c^2+a^2}{2c} \pm a = \frac{(c+a)^2}{2c}$ uti supra, necnon $= \frac{(c-a)^2}{2c}$. Postremus hic valor Ellipsin alteram *similem* indicat, quae Semiaxem transversum habeat $\frac{c^2-a^2}{2c}$, et coniugatum $\frac{(c-a)^2}{2c}$, in eâdem inter se proportione τȣ̃ $c+a : c-a$, nempe Ellipsin $\beta'\gamma\delta$ in ipso schemate delineatam (128). Quapropter Semiaxes geminae Ellipseos, cuius arcus inserviunt integrationi Differentialis $\frac{dz\,.\sqrt{ez}}{\sqrt{fz-zz-gg}}$, in hac biformi expressione $\frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{ff}{4} - gg}$ continebuntur, g communi earum Ellipsium altero Semiaxe manente.

29. Nonnulla de hac re fusius commentari admodum iuverit. Ellipsis primigenia aut *directa*, cui nomen etiam *rectificatricis-natae*, relatione habita ad Formulam $\frac{a}{c+a}\cdot\frac{dz\sqrt{2cz}}{\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c}\,.\,z - z^2 - \left(\frac{c^2-a^2}{2c}\right)^2}}$, toto iure devolutum censuerim, Semiaxes consequitur summa constructionis facilitate perinsignes, transversum nempe $2a = AF$, et coniugatum $\frac{c-a}{c+a}\,.\,2a$ $= AK = FA - FK$, quae FK sit tertia continua geometrice proportionalis post BF, AF per Euclidem. Ex adverso Ellipsis *indirecta*, quae ordine minus nativo dimanat ab invento Pascalii, Semiaxes habet transversum HF, coniugatum $\frac{BZ}{2}$, quorum constructio nec aeque simplex sit, nec originem suam aeque in aperto ponat, sed tantummodo inserviat maiori commodo Analystarum. Veruntamen, aut *directae*, aut *indirectae* Ellipsi fiat

fiat locus, iidem deteguntur *limites* Formulae indicati ab Ellipsibus sive earum axibus *imaginariis*. In prima enim Ellipsi hoc accidit dum $f^2 < 4g^2$, vel $\frac{c^2+a^2}{2c} < \frac{c^2-a^2}{2c}$, aut $c^2+a^2 < c^2-a^2$, quod fieri nequit nisi $a = \sqrt{f^2-4g^2}$ *imaginarium* fuerit, et ideo *imaginarius* etiam Semiaxis transversus $2a$, et Circulus $AGFD$ post *limitem* praetergressum Radii $a=0$, sive $\frac{f}{2}=g$, in quo *limite* tota cessat applicatio directa doctrinae Pascalii. Ellipsis quoque *indirecta* evadit *imaginaria* eodem casu τ8 $f^2 < 4g^2$, nimirum $\frac{c^2+a^2}{2c} < \frac{c^2-a^2}{2c}$: tunc etenim in Aequatione quadratica $\left(\frac{c^2+a^2}{c}\right)v - v^2 - \left(\frac{c^2-a^2}{2c}\right)^2 = 0$ fit v, scilicet $\frac{(c+a)^2}{2c}$ Semiaxis transversus *imaginarius* ob a *imaginarium* (129). Haec omnia mirum in modum consentiunt cum iis a Bougainvillio, aliisque, prolatis in Institutionibus Calculi Summatorii (130). Selecta autem Ellipsi primigenia ad constructionem Integralis eius Formulae, quam *aboriginem* nuncupare liceat, $\frac{a}{c+a} \cdot \frac{dz\sqrt{2cz}}{\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c}.z-z^2-\left(\frac{c^2-a^2}{2c}\right)^2}}$ palam est ex iam dictis fieri $(c+a)SM = a\sqrt{2c}\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c}.z-z^2-\left(\frac{c^2-a^2}{2c}\right)^2}}$. Hac constructione ad Ellipsim *indirectam* traducta, quum sit $SM:\sigma\mu::\frac{c-a}{c+a}.2a:\frac{c^2-a^2}{c}$, praesto erit Aequatio $(c+a)SM = \frac{2a.2c.\sigma\mu}{c+a}$, et idcirco orietur Integrale $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c}.z-z^2-\left(\frac{c^2-a^2}{2c}\right)^2}} =$ $\frac{2\sqrt{2c}}{c+a}.\sigma\mu = \frac{2.\sigma\mu}{\sqrt{HF}}$, vel ad *homogeneitatem* servandam, uti semper decet Geometram, $\int\frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{fz-z^2-g^2}} = \frac{\sqrt{OF}}{\sqrt{HF}}.\sigma\mu = \frac{\sqrt{HF.OF}}{HF}.\sigma\mu =$

$\sqrt{A\mu.OF}$

$\frac{\sqrt{A\mu . OF}}{A\mu} . \sigma\mu = \omega\nu$ arcui *simili* Ellipsis *similis* $\omega\nu\pi$, cuius Semiaxis transversus adaequet Mediam continue geometricam proportionalem inter HF et OF lineas datas.

30. Universaliter, ad investigandum Pascalii methodo Integrale $\int \frac{n . dz \sqrt{ez}}{m . \sqrt{fz - z^2 - g^2}}$, vel potius $\frac{2n}{m} \int \frac{dz \sqrt{ez}}{2\sqrt{fz - z^2 - g^2}}$, constructionis ordo hic erit, a Circuli proprietatibus, salva *homogeneitatis* lege desumptus. Describatur Coordinatis invicem perpendicularibus per communem Analysin Cartesianam Circulus, cuius aequatio localis est $fz - z^2 - g^2 = y^2$, supposita recta $BHAF$ axe abscissarum, et puncto H earum numerationis initio. Sit eius centrum O, et in diametro producta ex parte H assumatur $OB = \frac{f}{2} + g$. Circulus iste secet axem illum in punctis A, H, quae valores extremos HA, HF variabilis z definient, ultra quos vel ex parte τῶ H diminuta, vel ex adversa τῶ F aucta variabili z *imaginaria* fieret Formula integranda (131). Semiaxe transverso $\sqrt{HF . e}$, ac coniugato, qui sit ad transversum in ratione BA ad BF, describatur Quadrans Ellipsis conicae $\theta\theta'\beta$. Quibus omnibus paratis, erit pro quolibet valore τῶ $z = HC$ (et sic de aliis valoribus arguendum eâdem semper constructione servata)

$$\int \frac{n . dz \sqrt{ez}}{m . \sqrt{fz - z^2 - g^2}} = \int \frac{2n}{m} . \frac{dz \sqrt{ez}}{2\sqrt{fz - z^2 - g^2}} = \frac{2n}{m} \int \frac{dz \sqrt{ez}}{2\sqrt{fz - z^2 - g^2}} = \frac{2n}{m} . \theta\theta' = \frac{n}{m} . \theta'\theta\varphi, \text{ sive } \int \frac{dz \sqrt{ez}}{\sqrt{fz - z^2 - g^2}} = \text{arcui } \theta'\theta\varphi.$$

Itaque $\int \frac{dz \sqrt{ez}}{\sqrt{fz - z^2 - g^2}}$ dum $z = HC$ par erit duplo arcus Elliptici $\theta'\theta$ vel arcui $\theta'\theta\varphi$, ac demum si $z = HF$, postremo eius variabilis valori, peraequabit $\beta\theta\zeta$ sive $\theta\beta\xi$, semiperimetrum Ellipseos descriptae. Quod Integrale $\int \frac{dz \sqrt{ez}}{\sqrt{fz - z^2 - g^2}}$, si z fuerit $= HC$ etc., typum etiam habet geometricum elegantissimum in Circulo *dato* ac nuper descripto ad eius constructionem oculis obiiciendam. Punctum etenim B *datum* est ex praemissis, et *dati* quoque sunt radius $OA = a = \frac{\sqrt{f^2 - 4g^2}}{2}$, necnon valor τῶ $c =$

$BO =$

$BO = \frac{f}{2} + g = \frac{f+2g}{2}$. Igitur $\int \frac{dz\sqrt{ez}}{\sqrt{fz-z^2-g^2}} =$

$$\frac{\sqrt{e}}{a\sqrt{2e}} \int \frac{adz\sqrt{2ez}}{\sqrt{\frac{e^2+a^2}{e}.z-z^2-\left(\frac{e^2-a^2}{2e}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{e}}{(f+2g)\sqrt{f-2g}} . \int BD.DE$$

etc. ab A ad E; adeo ut totum Integrale $\int \frac{dz.\sqrt{ez}}{\sqrt{fz-z^2-g^2}}$, facta variabili $z = HF$, evadat $\frac{2\sqrt{e}}{(f+2g)\sqrt{f-2g}} . \int BD . DE$ etc. per totam Circuli Semiperipheriam. Idem contingit dum propositum Integrale fuerit $\int \frac{n}{m} . \frac{dz\sqrt{ez}}{2\sqrt{fz-z^2-g^2}}$, utpote quod adaequaverit $\frac{2n\sqrt{e}}{m(f+2g)\sqrt{f-2g}}$. $\int BD . DE$ etc. tantummodo permutato formulae coefficiente. Vel, si potius lineae placeant, erit $\int \frac{dz\sqrt{ez}}{\sqrt{fz-z^2-g^2}} = \frac{\sqrt{e}}{AO\sqrt{2BO}} . \int BD . DE$ etc., ac similiter $\int \frac{n}{m} . \frac{dz\sqrt{ez}}{\sqrt{fz-z^2-g^2}} = \frac{n\sqrt{e}}{m . AO . \sqrt{2BO}} \int BD . DE$ etc., uti superius. Hoc Integralis quaesiti cum Circuli passionibus elementaribus arctissimum foedus, praeterquamquod animum recreet, et lucem perquam maximam diffundat mutuatam a Pascalii doctrina, admirationi etiam est quomodo Circulum non viderint Analystae ab ipsa Formula summanda eloquentissime demonstratum.

31. Duo tamen stimulum excitant ad theoriae complementum. Integrale hac nova ratione repertum quum ab Ellipsi pendeat ad minorem Axem relata, et cuius abscissae x non ab eius Centro A, sed a puncto O numerentur, suspicio subest ne differat ab Integrali, quod passim dant Analystae ab Ellipsi dependens ad maiorem Axem relata, abscissis ab eiusdem Centro computatis (132). Nec minus fortasse ab aliquibus dubitandum erit de constructionis veritate a Pascalii doctrina desumptae nisi ab ipso Integrali, retorto itinere, eam regeneratam conspiciant. Ut a primo exordiar, prae oculis habeo Formulam a Bougainvillio traditam

 $dz\sqrt{az}$

$\dfrac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{(qa+a)z-z^2-qaa}}$, quae par est arcui du Ellipseos Apollonianae, cuius maior Semiaxis a, minor $a\sqrt{q}$, et in qua variabilis z huiusmodi lege procedit, ut sit $aa+(q-1)xx=az$, computatis abscissis x a centro Ellipseos super Axem maiorem (133). Ad comparationem rite recteque instituendam eligo Formulam analogam §'. 29'., nimirum $\dfrac{dz\sqrt{ez}}{2\sqrt{fz-z^2-g^2}}$, dummodo in hac formula sit $e=\dfrac{f+\sqrt{f^2-4g^2}}{2}=$ Semiaxi maiori, veluti a in prima Formula, ne analogia perturbetur. Formularum prior, uti alibi dictum, in §°. praesertim 27mo., Parabolam Ellipsi coniungit hoc modo (Fig. 32.). Ellipsis est $a\varepsilon CA$ (134), Axe transverso praedita $A\alpha=2a$, et Centro K, suppositis $KB=x$, $AC=u$, $Cc=du$ etc., atque Axe coniugato $=2a\sqrt{q}$, qui Coefficiens numericus q unitate minor fractionem adaequet $\dfrac{p}{2a}$, cuius numerator fuerit Parameter aut Latus-rectum Ellipseos ad maiorem Axem relatae. Parabola vero, quae a variabilium substitutione enascitur, ea est, quam Aequatio concludit $x^2=\dfrac{a}{1-q}(a-z)$, videlicet $FEDG$, suum verticem primarium habens in D remotum a centro K per intervallum $DK=AK=a$, Parametrum $\dfrac{a}{1-q}$, abscissas KB, Kb etc. $=x$, ordinatas EB, eb etc. $=z$, atque earum extremas $FA, G\alpha=\dfrac{p}{2}$ vel Ellipseos semiparametro. Quum x itaque excrescat diminuta z, et vicissim (135), atque z inter duos valores aut valorum limites $AF=\dfrac{p}{2}=qa$, et $KD=a$ comprehendatur, quibus traiectis Formula summanda *imaginaria* fiat, erit $\displaystyle\int\frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{(qa+a)z-z^2-qaa}}$ ab AF ad BE aequalis $\int du=\int cC=$ arcui AC. Consimiliter in alia Formula ad modum Pascalii integranda $\dfrac{dz\sqrt{ez}}{2\sqrt{fz-z^2-g^2}}$, ubi ex hypothesi $f=(1+q)a, g=a\sqrt{q}$, prae-

missa

missa docent, ac praecipue §^{us}. 30^{mus}. esse $HK = AF = qa$, $HI = DK = a$, qui sunt iidem extremi valores τȣ z super HI a puncto H computati, ideoque KI diametrum Circuli $KVIU$ peraequare $(1-q)a$. Radius ergo $TK = (1-q)\frac{a}{2}$, $HT = \frac{HK+HI}{2} = (1+q)\frac{a}{2} = \frac{f}{2}$, veluti etiam sponte dimanat a natura ipsa Aequationis $fz - z^2 - g^2 = 0$ aut $z^2 - fz + g^2 = 0$, in qua Coefficiens $-f$, signo tantum inverso, summae duarum Radicum HK, HI aequalitatem servet necesse est. Accedit $c = \frac{f}{2} + g$ ex §°. $30^{\text{mo}}. = \left(\frac{(1+q)}{2} + \sqrt{q}\right)a$ per hypothesin $= YT$. Hisce omnibus collectis describatur Semicirculus QIP, ac Semiaxe transverso $KP = KI = (1-q)a$, et coniugato $K\Phi$, qui sit ad transversum uti $YK : YI :: (1+q)\frac{a}{2} + a\sqrt{q} - (1-q)\frac{a}{2} : (1+q)\frac{a}{2} + a\sqrt{q} + (1-q)\frac{a}{2} :: q + \sqrt{q} : 1 + \sqrt{q} :: K\Psi : KA$, Ellipsis concentrica $Q\Phi P$, quae ideo *similis* erit alteri Ellipsi $\alpha\Psi A$ primum delineatae (136). Arcus ergo *similes* quicumque duarum Ellipsium proportionem tenebunt Semiaxium $KP : KA$, nimirum $(1-q)a : a$, et simplicius $1-q : 1$. Abscindatur denique $HM = EB = z$, et iuxta §^{um}. 27um. erigatur normalis MS usque ad occursum Peripheriae circularis in puncto S, quod punctum ope chordae KS coniunctum cum centro K determinabit in productione eiusdem chordae KSL aliud punctum in Hemiperipheria QIP, a quo ducta LN perpendiculari ad Axem PQ definiet arcum Ellipticum PR, cuius abscissa KN a centro A computata per §^{um}. 27um. sit aequalis $\sqrt{(1-q)a(a-z)}$, et idcirco rationem habeat ad priorem abscissam $KB = \sqrt{\frac{a}{1-q}(a-z)}$ τȣ $1-q : 1$, scilicet Semiaxium $KP : KA$. Puncta igitur K, R, C sunt in eàdem recta propter Ellipsium *similitudinem*, et arcus PR, AC, necnon eorum elementa rR, cC *similia*, atque ideo in ratione constante $1-q : 1$, uti superius. Sed ex §°. 29no. est $a\sqrt{2c}$. $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c}.z - z^2 - \left(\frac{c^2-a^2}{2c}\right)^2}} = (c+a)PR$. Ergo substitutis valo-

G 2 ribus

ribus constantium erit $(1-q)\frac{a}{2}\sqrt{2\left(\frac{(1+q)}{2}+\sqrt{q}\right)a}\times$
$\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz-z^2-g^2}}=(1+\sqrt{q})a.PR$, videlicet post debitam reductionem, quum ex iam dictis sit $e=KA$, erit $(1-q)(1+\sqrt{q})$.
$\int\frac{dz\sqrt{ez}}{2\sqrt{fz-z^2-g^2}}=(1+\sqrt{q})PR$, aut demum $\int\frac{dz\sqrt{ez}}{2\sqrt{fz-z^2-g^2}}=$
$\frac{PR}{1-q}=AC$ (propter $1-q:1::PR:AC$) $=$
$\int\frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{(qa+a)z-z^2-qaa}}$. Quod itaque pollicitus sum plenissimam demonstrationem accepit; adeo ut in aperto nunc positum sit eodem collimare, eundemque adamussim concludere arcum Ellipticum duas methodos inter se maxime discrepantes, scilicet, vulgatam Analystarum, illamque a Pascalio deductam, tametsi earum prima abscissas numeret a K versus A, secunda a T versus K, prior a triangulo *characteristico* Ellipseos Ctr exordium sumat, altera Circulum tantum ac Rectas adhibeat, una variabilem z in Parabola GDF contempletur, dum alia in solo Axe HI variabilem istam consideret. Ars autem tota consistit in relatione inter HM et $KN=IS$, quae relatio ex affectionibus Circuli primitivis Parabolam implicitam continet, nimirum eam Aequatione $(1-q)a(a-z)=y^2$ gaudentem (137), ac Parametro $=KI$ diametro Circuli in Figura descripti.

32. Quod alterum adtinet, regenerationem nempe doctrinae Pascalii ex Integrali praecognito, pene omnia parata sunt in §°. antecedente. Est enim $\int\frac{dz\sqrt{ez}}{2\sqrt{fz-z^2-g^2}}=\frac{PR}{1-q}$, videlicet habetur $\left(\frac{1-q}{2}\right)\sqrt{e}$.
$\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz-z^2-g^2}}=PR$, vel post congruas substitutiones, quum sit $e=AK$, et $2TK:AK::1-q:1$, oritur $\frac{TK\sqrt{1-q}}{\sqrt{2}.\sqrt{TK}}\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz-z^2-g^2}}=$
PR. Sed iam vidimus esse $e=\frac{(1+\sqrt{q})^2.TK}{1-q}$, ideoque $\sqrt{2e}=$

$(1+$

$\frac{(1+\sqrt{q}).\sqrt{2}.\sqrt{TK}}{\sqrt{1-q}}$, necnon $c+a=c+TK=\frac{(1+\sqrt{q})2TK}{1-q}$ $=(1+\sqrt{q})AK=$ Summae Semiaxium Ellipseos *datae* ex Formula *data*, quod est equidem perueundum Theorema. Erit itaque Coefficiens nuper adsertus, nempe $\frac{TK\sqrt{1-q}}{\sqrt{2}.\sqrt{TK}}=\frac{a\sqrt{2c}}{c+a}$. Praeterea est $f=$ $\left(\frac{1+q}{1-q}\right)2TK=\frac{c^2+TK^2}{c}$, propter $\left(\frac{(1+\sqrt{q})^4+(1-q)^2}{(1-q)^2}\right)TK^2$. $\left(\frac{(1-q)}{(1+\sqrt{q})^2 TK}\right)=\left(\frac{(1+\sqrt{q})^4+(1-q)^2}{(1+\sqrt{q})^2}\right)\frac{TK}{1-q}=\left(\frac{1+q}{1-q}\right)2TK$, uti cuilibet facile est experiri. Consimiliter habetur $g=\sqrt{q}.AK=$ $\frac{\sqrt{q}}{1-q}.2TK$, nimirum $=\frac{c^2-TK^2}{2c}$, ex eo quod palam omnibus fiat aequalitas notissima $\frac{((1+\sqrt{q})^4-(1-q)^2)TK^2(1-q)}{(1-q)^2(1+\sqrt{q})^2.2TK}=\frac{TK}{2(1-q)}$ $\left(\frac{(1+\sqrt{q})^4-(1-q)^2}{(1+\sqrt{q})^2}\right)=\frac{TK.4\sqrt{q}}{2(1-q)}=\frac{\sqrt{q}}{1-q}.2TK$, quemadmodum supra. Integrale igitur propositum $(1-q)\int\frac{dz\sqrt{cz}}{2\sqrt{fz-z^2-g^2}}=$ PR vertitur in $\frac{a\sqrt{2c}}{c+a}\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c}.z-z^2-\left(\frac{c^2-a^2}{2c}\right)^2}}=PR$, et

facta variabili $z=\frac{a^2+c^2}{2c}-x$ hoc ipsum Integrale evadit $\frac{a}{c+a}$: $\int\frac{-dx\sqrt{a^2+c^2-2cx}}{\sqrt{a^2-x^2}}=PR$, nimirum evadit Theorema Pascalii relatum ad Circulum radii TK, abscissis x a centro T computatis, et ubi $c=YT$, atque $\int\frac{-adx\sqrt{a^2+c^2-2cx}}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int YS$ etc. in arculos Circuli $=YI.PR$. Haec vero reversio ad caput illud Theoriae, unde fuimus digressi, magni roboris est ad confirmandam hucusque sequuti itineris veritatem, dubiumque omne de doctrinae fidelitate amovendum. Universaliter, si proponatur Integrale in Circulo quaerendum

$\int$

$$\int \frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{a(q+1)z-z^2-qaa}}, \text{ vel potius} \int \frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}z-z^2-b^2}}$$

suppositis a, b Semiaxibus Ellipseos *datae*, cuius arcum hoc Integrale repraesentat iuxta notos canones Analystarum, istud Integrale in Theorema Pascalii sic facile vertitur. Est $\int \frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}z-z^2-b^2}} = \frac{a^2}{(a^2-b^2)(a+b)}$

$$\int \frac{-\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)dx\sqrt{\left(\frac{(a+b)^2}{2a}\right)^2+\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2-\frac{(a+b)^2}{a}.x}}{\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2-x^2}}; \text{ qua}$$

in expressione Radius R Circuli ad morem Pascalii est $\frac{a^2-b^2}{2a}$, et distantia puncti emissionis rectarum ab eius Centro seu $c = \frac{(a+b)^2}{2a}$, adeo ut omnia pateant ex Semiaxibus datis a et b, commodumque tribuat eximium Aequatio praedemonstrata $c+R=a+b$. Et re quidem vera postremum Integrale, quod valde involutum adparet, reductione facta idem est cum $\int \frac{dv\sqrt{a^2+b^2+2av}}{2\sqrt{2}.\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2-v^2}}$, sive post congruam substitutionem idem cum $\int \frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}z-z^2-b^2}}$; qua inita gradatione Theorema ipsum Pascalii aeque ducit ad Formulam oecumenicam inveniendam pro arcu Hyperbolae conicae. Sit etenim haec ad primum Axem relata, ac veluti iubet §^{us}. 24^{tus}. in Formula illa Theorematis Pascalii fiat tantummodo $b=b\sqrt{-1}$. Tunc Formula evadit $\frac{a^2}{(a^2+b^2)(a+b\sqrt{-1})}$

$\int$

$$\int \frac{\left(\frac{a^2 + b^2}{2a}\right) dx \sqrt{-\left(\frac{(a + b\sqrt{-1})^2}{2a}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2}{2a}\right)^2 + \frac{(a + b\sqrt{-1})^2}{a} x}}{\sqrt{x^2 - \left(\frac{a^2 + b^2}{2a}\right)^2}}.$$

Ab ista oritur post reductionem simplicior, quum praeter spem sese invicem destruant *imaginaria*, $\int \frac{dv\sqrt{-a^2 + b^2 + 2av}}{2\sqrt{2} . \sqrt{v^2 - \left(\frac{a^2 + b^2}{2a}\right)^2}}$. Ac demum posito $v - \frac{(aa - bb)}{2a} = z$, procedit $\int \frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{z^2 + \left(\frac{aa - bb}{a}\right)z - b^2}}$, nimirum arcus Hyperbolae, quemadmodum alii invenerunt. Hic igitur arcus Hyperbolae originem etiam habet a Pascalii Circulo non secus atque arcus Ellipseos, hoc tamen discrimine quod R radius Circuli sit realis, nempe $\frac{a^2 + b^2}{2a}$, sed punctum emissionis rectarum nullibi exsistere possit, quia $c = \frac{(a + b\sqrt{-1})^2}{2a}$. Manet nihilominus perinsignis analogia, et eo magis elucescit ob $c + R = a + b\sqrt{-1}$ uti superius.

33. Concordia autem ista itinerum prima fronte discordium investigationi diverso etiam modo concinnandae inservit alterius Formulae canonicae ab arcu Hyperbolae dependentis. Expressio etenim $\frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{(qa + a)z - zz - qaa}}$ in §°. 31mo. contemplata eadem est ac

$$\frac{dz . \sqrt{az} . -\sqrt{-1}}{2\sqrt{-(qa + a)z + zz + qaa}} = \frac{-dz\sqrt{-az}}{2\sqrt{-(qa + a)z + zz + qaa}},$$

quae ita primum parari debet per regulas Analyseos (videatur praesertim Pars I^a^. *Institutionum Calculi Integralis Euleri* in Sectione I^a^. p^a^. 108. Coroll. 2do. atque Volumen VI^um^. *Opusculorum* Alemberti pag^is^. 140. 41. 42. ne de sexcentis loquar Algebrae scriptoribus) ad hoc, ut limites et qualitates variabilis z in oppositas convertantur. Praeterea, quum *species* q sit exponens rationis quadrati Semiaxis coniugati ad quadratum semitransversi, oportet ut permutetur in negativam ex dictis in calce §^i^. 24^ti^. ad

hoc

hoc, ut Formula respiciens Ellipsin ad primum Axem relatam pertineat ad Hyperbolen primo pariter Axi suo accommodatam. Quo facto Formula evadit

$\frac{-dz\sqrt{-az}}{2\sqrt{(qa-a)z+zz-qaa}}$, et ad *imaginaria* tollenda quum necesse sit fieri variabilem z negativam, atque hoc negativum afficiat tantummodo $-dz$ ac $\sqrt{-az}$ et primum terminum $(qa-a)z$ denominatoris, ipsumque vertat in $(a-qa)z$, ceteris iisdem manentibus, oritur tandem

$\frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{zz+(a-qa)z-qaa}}$ arcum infinite-parvum Hyperbolae conicae repraesentans. Hinc est quod, quum $a-qa$ possit esse positivum vel negativum iuxta diversas Hyperbolarum species, τὸ $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz \pm fz - gg}}$ ab arcu semper obtineatur Hyperbolae huiusmodi, ut Semiaxis coniugatus sit $g = \sqrt{qaa} = a\sqrt{q}$, ac Semiaxis eius transversus sit $\pm\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg} = \frac{a-qa}{2}+\sqrt{\left(\frac{a-qa}{2}\right)^2+qaa} = \frac{a-qa}{2}+\frac{a+qa}{2} = a$. Semiaxes isti quoque dimanant ab illis Ellipseos in citato §°. 28vo. descriptis, quum ibi semitransversus repertus fuerit $\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}-g^2}$, atque hic, ob $g^2 = -g^2$ et $f = \pm f$, converti debeat in $\pm\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}$ uti superius. Discrimen unicum manet inter Formulas Semiaxium Ellipseos et Hyperbolae *analogae*: namque in earum postrema signo duplici gaudere nequit τὸ $\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}$ quemadmodum in prima ostendi de $\sqrt{\frac{ff}{4}-gg}$ iuxta §^{tm}. 28^{vum}., et discriminis ratio est (vid. etiam §^{um}. 43^{ium}.) quod in Ellipsi geminus valor τῶ $\frac{f}{2}\pm\sqrt{\frac{ff}{4}-gg}$ positivus sit, in Hyperbola vero τὸ $\pm\frac{f}{2}-\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}$ negativum evadat. Hoc ipsum discrimen acutissimus Eulerus a diversa theoria derivavit in Corollario VI^{to}. pag^{ae}. 21^{mae}. Voluminis

Voluminis X^{mi}. *Novorum Commentariorum Imperialis Academiae Petropolitanae*. Duobus a nativo Pascalii fonte deductis Formulis oecumenicis Integralium rectificationem Coni-sectionum involventium, totum opus absolutum est, quum Analystae omnes in eas Formulas cardinales resolvant alias innumeras expressiones Differentiales. Veruntamen in re nobilissima ociemur aliquantisper. Eadem Formula primitiva $\frac{-adx\sqrt{a^2+c^2-2cx}}{\sqrt{a^2-x^2}}=(c+a)PR$ vident omnes quomodo extendi possit ad alias quoque inveniendas. In §^{o}. 26to. admonui Integrale istud pendens a Theoremate Pascalii *imaginarium* fieri dum x limites traiiciat $\pm a$, et in §^{o}. 29no. de limitibus illis agens adnotavi Circulum ab ea formula contemplatum, ideoque et Ellipsin, ad quam ducit, *imaginariam* fieri dum Radius a *imaginarius* evadat. Fingatur primum abscissas x vagari extra limites definitos $\pm a$, quod ut eveniat, τὸ $\frac{-adx\sqrt{a^2+c^2-2cx}}{\sqrt{a^2-x^2}}$ converti debet in $-\frac{adx\sqrt{2cx-c^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}}$; atque haec expressio ne *imaginaria* fiat, opus est ut x incipiat a valore $\frac{c^2+a^2}{2c}$, nimirum in Fig^a. 31^a. ab OH ex §^{o}. 27mo., et deinceps versus B in infinitum excurrat. Quo in casu geometrice expressa illa Formula transfertur ad Hyperbolam aequilateram *Ahilm* primo Axi *FAB* relatam, atque idcirco $\int\frac{-adx\sqrt{2cx-c^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, vel si de more fiat $x-\frac{(c^2+a^2)}{2c}=z$ uti in §^{o}. 27mo., $\frac{a\sqrt{2c}}{c+a}\times$ $\int\frac{-dz\sqrt{z}}{\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c}.z+z^2+\left(\frac{c^2-a^2}{2c}\right)^2}}$, sive $\frac{n\sqrt{c}}{m}\int\frac{-dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz+z^2+g^2}}$ (Trinomio factores reales habente) ad normam §^{i}. 28^{vi}. aequivalet Summae productorum ex rectis lineis, quae possint differentiam quadratorum in^2-Bn^2, lr^2-Br^2, mt^2-Bs^2, etc. in Sectores centricos negativos infinite parvos Hyperbolicos Oil etc. divisos per dimidium Semiaxis trans-

 versi

versi $\frac{OA}{2}=\frac{a}{2}$ atque iterum per $c+a$; et idem dicendum de tribus aliis Hyperbolae ramis. Hi Sectores ita divisi nihil aliud sunt ex Elementis praeterquamquod $-\frac{a}{c+a}\, dl\,(x+\sqrt{x^2-a^2})$, atque adeo respondent arcubus Circuli minimis *DE* etc. divisis pariter per $c+a$, ut isti sint eorum inverse *imaginarii*, scilicet $-\frac{a}{c+a}\cdot\frac{1}{\sqrt{-1}}\, dl(x+\sqrt{x^2-a^2})$, aut $-\frac{a}{c+a}\cdot\frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot dl\,(x\sqrt{-1}+\sqrt{a^2-x^2})$ veluti ex differentiatione liquet, vel tandem $\frac{-1}{(c+a)}\cdot\left(\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$. Nova igitur expressio $\int\frac{-dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz+z^2+g^2}}$ nil novi continet, quum et eidem ad unguem referatur arcui Ellipseos *PR* Fig^{ae}. 32^{dae}. ex eo quod ortum ducat a primitiva multiplicata per $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$, aut $\sqrt{-1}\cdot-\frac{adx\sqrt{a^2+c^2-2cx}}{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{a^2-x^2}}$, sive ab aequali $\sqrt{-1}\cdot-adx\frac{\sqrt{(c-x)^2+(a^2-x^2)}}{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{a^2-x^2}}$, quae primitivae ipsius valorem non mutat, sed eliminatis tantum *imaginariis* Summam quadratorum rectarum ad Circulum in hanc Summam vertit *imaginariam*, seu Differentiam *realem* quadratorum ad Hyperbolam $(x^2-a^2)-(c-x)^2$, Circulique arcum minimum $\frac{-adx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ convertit in eius inverse *imaginarium* $\frac{-adx}{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{a^2-x^2}}$ sive in negativum Sectorem Hyperbolae etc. $-\frac{\frac{a^2}{2}\cdot dx}{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{x^2-a^2}}$. Quod et Formula ipsa demonstrat a primitiva derivata $\int\frac{-dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz+z^2+g^2}}$, utpote quae facto $z=-u$ evadat

$\int$

$$\int \frac{du\sqrt{-u}}{\sqrt{-fu-+u^2-+g^2}} = \int \frac{du\sqrt{-u}\,.\sqrt{-1}}{\sqrt{-fu-+u^2-+g^2}\,.\sqrt{-1}} =$$

$\int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{fu-u^2-g^2}}$ arcum Ellipticum repraesentans. Itaque tam $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz-z^2-g^2}}$, quam $\int \frac{-dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz-+z^2-+g^2}}$ unum et idem significant, et eosdem variabilis z positivos valores supponunt ad *imaginaria* evitanda; adeo ut, quamvis τὸ $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz-+z^2-+g^2}}$ ex communi Analystarum doctrina dependere videretur ab arcubus simul Ellipseos et Hyperbolae, inverso tantum signo numeratoris τὸ $\int \frac{-dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz-+z^2-+g^2}}$ ab arcu unius Ellipseos resolvatur: quod paradoxon in consideratione signi — inhaerentis expressioni differentiali, sive uti alias occurrit extra $\int$, haud satis animadvertisse Geometras memini. Eàdem ratione alterum Integrale $\int \frac{-dz\sqrt{z}}{\sqrt{g^2 \pm fz - zz}}$ arcum ipsum Hyperbolae unicum significat prouti $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz \pm fz - gg}}$, etsi primum illud solo numeratoris signo differat a $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{g^2 \pm fz - zz}}$ per arcum Hyperbolae simul cum Linea recta resoluto quemadmodum passim docent Algebrae Auctores. (Videatur signanter Bougainvillius num°. CCIX. Voluminis I^{i}.). Ad signorum vim ulterius inspiciendam proponatur $\int \frac{-dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz \mp fz - gg}}$, quod Integrale idem est ac $\int \frac{(dz\sqrt{z})\sqrt{-1}}{\sqrt{zz \pm fz - gg}}$, nimirum aequale (facto s = arcui Hyperbolico) $\int (ds\sqrt{-1})$. Accedunt insuper alia haec $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{gg \mp fz - zz}} =$

$$\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{-1}\,.\sqrt{z^2 \pm fz - g^2}} = \int \left(\frac{ds}{\sqrt{-1}}\right) = \int (-ds\sqrt{-1}),$$ necnon

$\int$

$$\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz-fz+gg}}=\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{-1}\,.\sqrt{fz-zz-gg}}=\int(\frac{ds'}{\sqrt{-1}})=$$

$\int(-ds'\sqrt{-1})$ dum s' repraesentet arcum Ellipseos, quorum omnium usus infra patebit. Radio praeterea assumpto $a\sqrt{-1}$ cessat Theorema Pascalii, sed nihilominus quod hac in hypothesi a Formula primitiva oritur Integrale

$$\int\frac{-a\sqrt{-1}\,.dx\sqrt{-a^2+c^2-2cx}}{\sqrt{-a^2-x^2}}=\int\frac{-a\sqrt{-1}\,.dx\sqrt{c^2-a^2-2cx}}{\sqrt{-1}\sqrt{a^2+x^2}}$$

$=\int\frac{-adx\sqrt{c^2-a^2-2cx}}{\sqrt{a^2+x^2}}$ non fit impossibile, quinimo quum ab Arcu *imaginariae* Curvae, in quem vertitur ille Ellipseos *realis* PR, ducto in Coefficientem mixtum *realem-imaginarium* $c+a\sqrt{-1}$ integrationem recipiat, nil obstar quominus *reale* sit, uti passim in Algebra exempla habentur, et per doctrinam §^{i}. sequentis includat Arcum *realem realis* Ellipseos, et Arcum *realem* Hyperbolae conicae (138). Quod ne coniectura tantum, sed veritate firmetur aliunde nota, substitutioni solitae, proati in §°. 27mo., locus fiat τῷ $\frac{c^2-a^2}{2c}-x=z$ ad hoc ut Formula $\int\frac{-adx\sqrt{c^2-a^2-2cx}}{\sqrt{a^2+x^2}}$ convertatur in alteram, homologam illi a doctrina Pascalii derivatae, videlicet in Formulam $a\sqrt{2c}\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{\left(\frac{c^2+a^2}{2c}\right)^2-\left(\frac{c^2-a^2}{c}\right)z+z^2}}$ (139). Haec Formula, quum $\frac{c^2-a^2}{c}$ possit esse vel positivum vel negativum propter c vel maius vel minus a, neglecto Coefficiente $a\sqrt{2c}$, formam acquirit universalem $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz+bb\pm fz}}$ (Trinomio tamen Factores *imaginarios* habente), quod Integrale illud est iuxta communes Analyseos Scriptores a rectificatione simul Ellipseos et Hyperbolae pendens (140). Revera si ad hoc illustrandum eligatur $-fz$, iam monui τὸ $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz-fz+gg}}$ idem esse cum arcu

arcu Ellipseos primo Axi relatae diviso per $\sqrt{-1}$, qui arcus ita divisus generat expressionem integrabilem ope arcus Elliptici simul et Hyperbolici, quemadmodum fusius declarabo in §°. 43^io^. Fructus ergo ipsius doctrinae Pascalii est etiam inventio Integralis huiusce formae, cuius originem si graphice contemplari mens fuerit, non e longinquo petenda, sed a proprietatibus elementaribus derivanda Hyperbolae aequilaterae, quae vicem gerit Circuli *imaginarii*. Videndum ergo in Hyperbola aequilatera Fig^ae^. 33^iae^. quid indicet expressio $\left(\frac{-adx}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)(\sqrt{c^2-a^2-2cx})$, abscissis x a centro I super Axem-secundum AB numeratis, et Semiaxe $OI=a$. In Axe secundo fiat $IC=c$, a quo puncto, eodem semper manente, egrediantur rectae innumerae CO, CE, CF etc. ad perimetrum usque quatuor ramorum descriptae Hyperbolae, uti ad Circuli circumferentiam in doctrina Pascalii. Quod in doctrina Pascalii erat pro Circulo $GONP$ recta quaelibet CL potentia aequalis summae Quadratorum CK, KL, scilicet $(c-x)^2+(a^2-x^2)$, unde oriebatur $CL=\sqrt{c^2+a^2-2cx}$, convertitur pro Hyperbola in rectam, quae possit differentiam Quadratorum CK, KM, nimirum $(c-x)^2-(a^2+x^2)$, quum Hyperbolae aequilaterae proprietas sit $KM=KO$, $GE=GO$, $HF=HO$ etc., unde oritur, evolutis Quadratis, recta aequalis $\sqrt{c^2-a^2-2cx}$. Quod autem in Circulo erat $\frac{-adx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, nempe elementum Arcus Circuli LS, sive Sectoris dupli LIS per Radium IO, seu a divisi, est in Hyperbola $\frac{-adx}{\sqrt{a^2+x^2}}$, nimirum elementum dupli Sectoris pariter centrici MIQ per ipsam rectam IO, aut a Semiaxem transversum divisi (141). Theorema igitur in Hyperbola omnino *analogum* Theorematі ad Circulum pertinenti obtinetur si *Summae* Quadratorum *Differentia* locum sumat, et vice Sectoris *Circuli* Sector *Hyperbolae* subeat. Dum itaque exponeretur doctrina Pascalii, assumpto primum in Axe AB ad alterum OP perpendiculari puncto C aut C' ubilibet sito extra centrum I, et ab eo numeratis abscissis, ac positis ordinatis orthogonalibus „ Summa productorum, quae fiant a rectis innu-
„ meris, quae possint *summam* Quadratorum Coordinatarum orthogonalium
„ a pun-

„ a puncto quovis C vel C' numeratarum in Circulo *dato* et a rectis in-
„ finite-parvis, quae oriantur a divisione Sectorum centralium minimo-
„ rum per Circuli Semiaxeos semissem, aequalis est uni Rectangulo rectae
„ *datae* $(c + a)$ in arcum *datum* Ellipseos „, in casu analogo sic exponi deberet „ Summa productorum, quae fiant a rectis innumeris, quae possint
„ *differentiam* Quadratorum Coordinatarum orthogonalium a puncto quovis
„ C vel C' numeratarum in Hyperbola aequilatera *data* et a rectis infinite-
„ parvis, quae oriantur a divisione Sectorum centralium minimorum per
„ Hyperbolae Semiaxis semissem, aequalis est uni Rectangulo *imaginariae*
„ rectae *datae* $(c + a\sqrt{-1})$ in arcum *datum* Curvae *datae*, sed *imagina-*
„ *riae* „, quae Ellipsis spuria huiusmodi est, ut eius Semiaxis coniugatus sit $\frac{c^2 + a^2}{2c}$ ex §°. 28vo., semitransversus autem sit $\frac{(c + a\sqrt{-1})^2}{2c}$, vel potius formam habeat $\left(\frac{c^2 - a^2}{2c}\right) + a\sqrt{-1}$. Et sane, substitutionibus rite factis in Formula Ellipseos conicae §^{i}. 24^{ti}., consequitur arcus $A - B\sqrt{-1}$, qui cum $c + a\sqrt{-1}$ producit *reale* Rectangulum, veluti quilibet poterit experiri. Qua analogia, inter uberrimos fructus Pascalii Theorematis enumeranda, nihil aptius, neque praestantius ad meditandum quomodo sit in veritate adserenda semper sibi constans Analysis (142).

34. Ceteroquin Formula ipsamet $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{z^2 \mp fz + b^2}}$ Geometram sponte revocat ad Hyperbolam aequilateram, utpote quae, ad instar Circuli in §°. 30mo., denominatore suo significet Aequationem localem $z^2 \pm fz + b^2 = y^2$ ad Hyperbolam aequilateram pertinentem, cuius Semiaxis sit $\frac{\sqrt{4b^2 - f^2}}{2}$, abscissis z super secundum axem computatis, ac centro ita posito, ut distet a principio abscissarum z per intervallum aequale $\pm \frac{f}{2}$. Valores isti cum Coefficientibus comparati Formulae *primigeniae*

$$\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{\left(\frac{c^2 + a^2}{2c}\right)^2 - \left(\frac{c^2 - a^2}{c}\right) z + z^2}}$$ determinantur hoc modo. Semiaxis $\frac{\sqrt{4b^2 - f^2}}{2} = a$, quod denotat in hypothesi assumpta nunquam *imaginarium*

narium fieri posse. Revera secetur Axis AB in H ita, ut sit $IH = \frac{f}{2} = \frac{c^2 - a^2}{2c}$; quo facto, initium abscissarum z cadet in puncto H, et palam est ob figuram Hyperbolicae Curvae $ROFVPT$ abscissas et ordinatas omnes a centro I (uti x, y), vel a puncto H (uti z, y), etiam in infinitum excurrentes, semper esse *reales*. Quid sit autem c formula ipsa patefacit, nimirum aequalis $b \pm \frac{f}{2}$, unde facillima enascitur determinatio puncti C (aut C') emissionis rectarum sine numero CO, CM, CE, CF etc. ad perimetrum Hyperbolae, a quibus in aperto ponitur et subiicitur oculis analogia atque cognatio intima superioris doctrinae Pascalii. Omnia diligentius rimari, quae nec difficilia sunt, nec iis dissimilia in §§^{is}. 27mo. 28vo. 29no. 30mo. 31mo. 32do. dum de Circulo agebam explicatis, supervacaneum censeo, neque immorabor in *casu* considerando $\frac{\sqrt{4b^2 - f^2}}{2}$ *imaginarii* sive aequalis $a\sqrt{-1}$, quum et facta hypothesis permutetur, et unica subeat variatio ab aequatione Hyperbolae aequilaterae $x^2 + a^2 = y^2$, relatae ad secundum axem AB, ad aequationem Hyperbolae eiusdem aequilaterae $x^2 - a^2 = y^2$ ad primum axem relatae, prouti est in Shemate delineatum. Unum duntaxat silentio praeterire nefas esset quod, quum τὸ $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{z^2 \mp fz + b^2}}$ praesidio artis analyticae passim adhibitae (143) separetur generatim in Differentialia huiusce formae $\frac{dv\sqrt{v}}{\sqrt{v^2 \pm nv - m^2}}$, et alterius $\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{cy - y^2 - g^2}}$, ideo doctrina Pascalii nos perduxerit ad demonstrandum $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{z^2 \pm fz + b^2}}$ pendere simul (exceptis casibus supradictis in §^{o}. 33^{io}.) a rectificatione Ellipseos et Hyperbolae praeter quantitates algebraicas aut rectas Lineas, quas *Summa* illa complectatur. Namque $\int \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{cy - y^2 - g^2}}$ est eius formae, quae ex praemissis ab arcu tantum Elliptico integrationem recipiat. Et a modo arguendi in §^{o}. 33^{io}. adhibito

to ceterae partes diversa forma gaudentes $\int \frac{dv\sqrt{v}}{\sqrt{v^2 \pm nv - m^2}}$ ab arcu tantum Hyperbolico pendent. Haec deductio, dum consentit mirifice cum vulgatis canonibus Calculi Summatorii, foecunditatem etiam adauget Theorematis Pascalii, quippe quod non solum ab eo *directe* fluat Integrale $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz - z^2 - g^2}}$ ope arcus Ellipseos, sed praeterea fluant *indirecte* tam Integrale $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{\pm fz + z^2 - g^2}}$ per arcum Hyperbolae (144), quam aliud $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{\pm fz + z^2 + g^2}}$ ope arcus Ellipseos et Hyperbolae simul, praeter casus superius exceptos. Simplicissimus autem valor Formulae generalis ab Hyperbola dependentis est $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{z^2 - g^2}}$, de quo in §°. 27mo. sermo fuit. Oritur quippe statim ac in Integrali $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{\pm fz + z^2 - g^2}}$ ponatur $f = 0$. Quum vero in Formula universali Semiaxis coniugatus Hyperbolae, uti in Ellipsi ad §^{um}. 28^{vum}., sit g, ac Semiaxis transversus a resolutione derivari debeat aequationis $\pm fz + z^2 - g^2 = 0$, nempe in hypothesi facta $z^2 - g^2 = 0$, hic etiam erit $= g$. Inde est quod Formula singularis $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{z^2 - g^2}}$ summetur ope arcus Hyperbolae aequilaterae quemadmodum habet Maclaurinus. Idem aliter, sed fictitie, derivaretur a Formula Semiaxium Hyperbolam respicientium, nimirum ab $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz \pm fz - g^2}}$, quae Formula mediate profluit iuxta §^{um}. 33^{ium}. a Pascalii Theoremate. Si etenim fuerit $f = 0$, et Formula evadat $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{z^2 - g^2}}$, duo Semiaxes 1°. c°. universaliter expressi g ac $\pm \frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} + gg}$ sunt ambo aequales g, ideoque pares inter se, ac pertinentes aequilaterae Hyperbolae. Similiter ope facillimae substitutionis, qua usi

sunt

sunt Commentatores Newtoni e Minimorum familia in Num°. CCLXVII°. Partis I^ae. *Elementorum Calculi Integralis*, $z = \frac{g^2}{u}$ exsurgit aliud Integrale $\int \frac{-g^2 du}{u\sqrt{u} \cdot \sqrt{g^2 - u^2}} = \int \frac{-u^2 du - g^2 du}{u\sqrt{u} \cdot \sqrt{g^2 - u^2}} + \int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{g^2 - u^2}}$, cuius prior pars quum integrationis algebraicae capax sit, altera necessario ab arcu Hyperbolae aequilaterae dependebit. Interim patet ex omnibus hactenus demonstratis veram Formulam primitivam huius esse minus notae speciei $\int \frac{dz\sqrt{A - Bz}}{\sqrt{C - z^2}}$ neglectis coëfficientibus, dummodo $C = A - \frac{B^2}{4}$, quae tantopere differt a Formula $\frac{dz(A + Bz)}{\sqrt{C - z^2}}$ ope rectificationis Circuli aut Ellipseos aequilaterae iamdudum resoluta, ut vix credibile sit priorem pendere a rectificatione Conicae Ellipseos. Eadem expressio formam facile acquirit $\int \frac{dz(A - Bz)}{\sqrt{A(A - \frac{B^2}{4}) - B(A - \frac{B^2}{4})z - Az^2 + Bz^3}}$, cuius aliquando meminisse iuvabit. Constat praeterea $\int \frac{dz\sqrt{a^2 + b^2 + 2az}}{\sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{2a}\right)^2 - z^2}}$ *directam* Formulam esse, quae reiectis Coëfficientibus ab Ellipseos rectificatione dependet, cuius Curvae sint a, b Semiaxes, eam derivando (secus ac in §°. 32do.) iuxta communem methodum Analystarum. Similiter $\int \frac{dz\sqrt{-a^2 + b^2 + 2az}}{\sqrt{z^2 - \left(\frac{a^2 + b^2}{2a}\right)^2}}$ *directa* expressio est arcum Hyperbolae significans. In quarum comparatione denuo adnotandum a primum esse, ac b secundum Semiaxium, prioremque Formulam in alteram verti facto $b = b\sqrt{-1}$, veluti in §°. 24to. aliter demonstravi, ac multiplicato denominatore prioris per $\sqrt{-1}$ atque eius numeratore per $-\sqrt{-1}$, quemadmodum initio §ⁱ. 33ⁱ. ad Formulam *derivatam* adipiscendam consimile artificium exhibui, et postmodum $-z$ in z converso. Universalius autem, propter $a <$ aut $> b$, primigenia Formula Hyperbolici arcus sic exprimetur

$\int$

$\int \frac{dz\sqrt{2az \pm af}}{\sqrt{z^2 - g}}$, aut simplicius $\int \frac{dz\sqrt{2z \pm f}}{\sqrt{z^2 - g^2}}$, vel potius $\int \frac{dz\sqrt{Bz \pm A}}{\sqrt{z^2 - C}}$ ad servandam cum Circulo analogiam, sive tandem $\int \frac{dz(Bz \pm A)}{\sqrt{(Bz \pm A)(z + \sqrt{C})(z - \sqrt{C})}}$. Eodem ritu Formula arcus Elliptici $\int \frac{dz\sqrt{Bz + A}}{\sqrt{C - z^2}}$ explicari sic poterit universaliter $\int \frac{dz(Bz + A)}{\sqrt{(Bz + A)(z + \sqrt{C})(\sqrt{C} - z)}}$, quemadmodum liquet. Et si fiat $\sqrt{C} + z = v$, erit Arcus Ellipticus $= \int \frac{dv\sqrt{A - B\sqrt{C} + Bv}}{\sqrt{v}\,.\,\sqrt{2\sqrt{C} - v}} =$ $\int \frac{dv\sqrt{m + v}}{\sqrt{v}\,.\,\sqrt{a - v}}$, necnon Arcus Hyperbolae peraequabit $\int \frac{dv\sqrt{\pm A - B\sqrt{C} + Bv}}{\sqrt{v}\,.\,\sqrt{v - 2\sqrt{C}}} = \int \frac{dv\sqrt{v \pm m}}{\sqrt{v}\,.\,\sqrt{v - a}}$; quae expressiones in infinitas numero formas facillime verterentur.

35. Ipsamet Pascalii doctrina extenditur quoque ad *Summam* statuendam productorum e lateribus innumeris Coni cuiusvis *scaleni* in arculos peripheriae Circularis ad Basim suam pertinentis, prouti in §°. 13^{io}. fusius disserui. Haec etiam *Summa* subsidio arcus Ellipseos conicae reperitur. Algebraice scripta Formulam praebet $\int \frac{-dx\,.\,a\sqrt{h^2 + a^2 + c^2 - 2cx}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ iisdem omnibus positis, quae in §°. 25to., et solummodo addita *specie* *h* pro indicanda altitudine Coni. Quum autem in prima Sectione, ac signanter in §§^{is}. 13^{io}. et 19no. et 20mo., nil novi suppeditaverit Geometria, videndum nunc an Synthesis atque Analysis inter se coniurent amice. Repetita eâdem simplicissima substitutione τῆ $z = \frac{h^2 + a^2 + c^2}{2c} - x$, convertitur illa expressio in

$a\sqrt{2c}$

$$a\sqrt{2c}\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{\left(\frac{h^2+a^2+c^2}{c}\right)z-z^2-\left(\frac{c^2-a^2}{2c}\right)^2-h^2\left(\frac{h^2+2a^2+2c^2}{4c^2}\right)}},$$

quae eiusdem formae est $\int\frac{dz\sqrt{ez}}{\sqrt{fz-zz-gg}}$ cum ea superius animadversa ad Ellipseos arcum ducente. Formula igitur in compositione sua nec hilum discrepans ab anteactis non dubito quin omnium suffragiis existimetur uti novitatis expers ac penitus infoecunda. Semiaxes Ellipseos *summatoriae* hoc in casu, qui universalior est praecedentibus, ipsosque singulariter complectitur facta hypothesi $h=0$, inveniuntur quemadmodum ad calcem §ⁱ. 28ᵛⁱ. Coniugatus nempe erit

$\frac{\sqrt{(c^2-a^2)^2+h^2(h^2+2a^2+2c^2)}}{2c}$: Transversus autem, qui a resolutione denominatoris Formulae oritur veluti foret Aequatio adfecta secundi gradus, erit $\frac{(c+a)^2+h^2}{2c}$. Nec solummodo ii confirmantur (145) observando quod in hypothesi τῦ $h=0$ Semiaxes evadant, uti in 1°. c°., quales necessario esse debent, $\frac{c^2-a^2}{2c}$ et $\frac{(c+a)^2}{2c}$, verum etiam confirmant legem latam in §°. 13ⁱᵒ. a geometrica Synthesi, videlicet proportionis Axium eorundem aequalis illi, qua gaudent inter se *minimum* ac *maximum* laterum Coni. Et re quidem vera Latera ista sunt $\sqrt{(c-a)^2+h^2}$ et $\sqrt{(c+a)^2+h^2}$. Est autem proportio geometrica Quadratorum horumce Laterum $(c-a)^2+h^2:(c+a)^2+h^2=$
$\frac{((c-a)^2+h^2)((c+a)^2+h^2)}{4c^2}:\frac{((c+a)^2+h^2)^2}{4c^2}$, in qua proportione postremus terminus evidentissime idem est ac Quadratum τῦ $\frac{(c+a)^2+h^2}{2c}$ iam supra reperti Semiaxis transversi, et terminus tertius aliter dispositus eodem redit ac $\frac{(c^2-a^2)^2+h^2(h^2+(c+a)^2+(c-a)^2)}{4c^2}=$
$\frac{(c^2-a^2)^2+h^2(h^2+2a^2+2c^2)}{4c^2}$, nimirum Quadratum Semiaxis con-

iugati superius inventi. Consensus vere mirabilis, quo nec facilior, nec maior in votis haberi unquam possit (146).

36. Quamvis *obliqui* Coni animadversio nullatenus locupletiorem reddat Analysin, uti nuper ostendi, multum tamen continet divitiarum immediata consideratio Superficiei Cylindri *scaleni* iuxta priorem Formulam §'. I^{mi}, et ad mentem Pascalii. Vocatis enim radio Baseos $a = NG$ (Fig^a. 6ta.), abscissis a centro $N = z$, altitudine Cylindri $BO = m$, et constante $AO = n$, Formula illa $GI \sqrt{HG^2 - \frac{GP^2}{GN^2} . GR^2}$ algebraice translata ita exprimitur $dz \frac{\sqrt{m^2 a^2 + n^2 z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}}$. Ista expressio, quum elementum praebeat Superficiei Cylindri *scaleni*, adaequabit ex dictis in §°. eodem Rectangulum $BA . d\Delta\Pi$; et idcirco erit $\int \frac{dz \sqrt{m^2 a^2 + n^2 z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \sqrt{m^2 + n^2} . \Delta\Pi$ arcum Ellipseos, cuius Semiaxis transversus $= a$, et coniugatus $= \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} . a$, abscissis super Axem minorem a centro numeratis et aequalibus $\frac{mz}{\sqrt{m^2 + n^2}}$, ut ex ipso Schemate constat. Absque praesidio igitur vulgatae methodi Differentialium, ac nequidem salutato Triangulo Ellipseos *characteristico*, Superficies Cylindrica *scalena* Formulam rectificationis illius Curvae conicae patefacit suffultam solummodo limitibus Circuli, nimirum Elementis Euclidis (147). Rite enim perpensa expressione $d\Delta\Pi = \frac{dz \sqrt{m^2 a^2 + n^2 z^2}}{\sqrt{m^2 + n^2} . \sqrt{a^2 - z^2}}$, et in Calculum introductis valoribus supra expositis tam Abscissae, quam Semiaxium, ea adquiret formam, sarta tecta aequalitate,

$$\frac{mdz}{\sqrt{m^2 + n^2}} . \frac{\sqrt{\frac{m^2 a^2}{m^2 + n^2} + \left(\frac{m^2 + n^2}{m^2} - 1\right) \frac{m^2 z^2}{m^2 + n^2}}}{\sqrt{\frac{m^2 a^2}{m^2 + n^2} - \frac{m^2 z^2}{m^2 + n^2}}}$$, in qua Functione

differen-

differentiali observandum est τὸ $\frac{m^2+n^2}{m^2}$ aequale ex hypothesi Quadrato Semiaxis maioris per Quadratum minoris diviso, scilicet ex Conicis Parametro ipsius Axis minoris per Axem minorem divisae. Subrogetur nunc, uti necesse est ob praemissa, $x = \frac{mz}{\sqrt{m^2+n^2}}$, $a' = \frac{ma}{\sqrt{m^2+n^2}}$, $\frac{p}{2a'} = \frac{m^2+n^2}{m^2}$, et statim Formula emerget $\frac{dx\sqrt{a'^2+\left(\frac{p}{2a'}-1\right)x^2}}{\sqrt{a'^2-x^2}}$ pro Arcu infinitesimo Ellipseos, quemadmodum passim Analystae decernunt (148). Veruntamen prior illa Formula a Superficie Cylindri orta admodum universalior, et ad Calculum Integralem promovendum aptior existimanda, utpote quae, unica substitutione simplicissima adhibita $z = qx$, ad Lineam rectam, formam adsumat $\int \frac{q\,dx\sqrt{m^2a^2+n^2a^2x^2}}{\sqrt{a^2-q^2x^2}} = \sqrt{m^2+n^2}$ in Arcum Ellipseos, vel $\frac{q}{\sqrt{m^2+n^2}}\int \frac{dx\sqrt{m^2a^2+n^2q^2x^2}}{\sqrt{a^2-q^2x^2}}$ = Arcui Ellipseos conicae. Integrale itaque $\int \frac{dx\sqrt{f+gx^2}}{\sqrt{h-kx^2}}$, in quo f, g, h, k positivae magnitudines sint, pendet ab Ellipseos rectificatione, atque ita pendet, ut non modo in eius generalitate iudicari debeat referri ad perimetrum Ellipseos, sed etiam definiri ad quam Ellipsin referatur *specie* et *magnitudine* datam. Quatuor etenim quantitates *datae* f, g, h, k quocumque in casu singulari determinant m, n, a, q dum comparatio instituatur cum formula praecedente, nimirum $m = \sqrt{\frac{f}{h}}$, $n = \sqrt{\frac{g}{k}}$, $a = \sqrt{h}$, $q = \sqrt{k}$, ex quibus nascuntur Semiaxis Ellipseos quaesitae $\frac{ma}{\sqrt{m^2+n^2}} = \sqrt{\frac{f^2k+fgh}{hk}}$, Parameter dimidia huius Semiaxeos $p = \left(\frac{m^2+n^2}{m^2}\right)a = \left(\frac{fk+gh}{fk}\right)\sqrt{h}$, et Abscissae super illum Axem a centro

tro computatae $= \sqrt{k} . x$. Quibus omnibus positis erit $\int \frac{dx\sqrt{f+gx^2}}{\sqrt{h-kx^2}}$ $= \sqrt{\frac{fk+gh}{hk^2}}$ in Arcum Ellipseos iuxta praecedentis methodi canones in numero ac mensura determinatum. Haec autem facillima derivatio appendix est doctrinae Pascalii, qua rite intellecta obtinetur quoque, uti ostensum, notissima Functio complectens *directam* rectificationem Ellipsium cum ceteris Functionibus *indirectis* eodem ducentibus, et in quibus enucleandis Geometrae celeberrimi adlaborarant nuperrime (149).

37. Omnes norunt ex principiis Conicorum Aequationem Ellipseos ad maiorem Axem relatae eodem penitus modo compositam esse atque illa ad Axem minorem, de qua mentio facta in §°. antecedente, et nequidem in nullo universalis expressionis Coëfficientium signo differre. Quod quum ita sit, Aequatio $\frac{dx\sqrt{a''^2+\left(\frac{p'}{2a''}-1\right)x^2}}{\sqrt{a''^2-x^2}} = ds$ elemento arcus Elliptici eadem manet dum abscissis x a centro similiter numeratis τὸ a' vice Semiaxis coniugati aut minoris, veluti supra, vertatur in a'' Semiaxem transversum. Unicum in usu Formulae, eiusque applicatione adparet discrimen, nimirum quod in prima Functione $\frac{p}{2a'} > 1$, et idcirco Coëfficiens secundi termini Numeratoris $\frac{p}{2a'} - 1$ in concreto positivus sit, quum in altera e contra $\frac{p'}{2a''} < 1$, et eapropter $\frac{p'}{2a''} - 1$ negativus. Analogae igitur Formulae in secunda hypothesi $\frac{dz\sqrt{m^2a^2+n^2z^2}}{\sqrt{m^2+n^2}\,.\,\sqrt{a^2-z^2}}$, necnon $\frac{dx\sqrt{f+gx^2}}{\sqrt{h-kx^2}}$ peculiarem formam adipiscuntur quando Ellipsis ad maiorem Axem relata fuerit $\frac{dx\sqrt{f-gx^2}}{\sqrt{h-kx^2}}$ et $\frac{dz\sqrt{m^2a^2-n^2z^2}}{\sqrt{m^2-n^2}\,.\,\sqrt{a^2-z^2}}$, quae postrema Functio ducit originem ab altera

univoca

univoca $\frac{mdz}{\sqrt{m^2-n^2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{m^2 a^2}{m^2-n^2}+\left(\frac{m^2-n^2}{m^2}-1\right)\frac{m^2 z^2}{m^2-n^2}}}{\sqrt{\frac{m^2 a^2}{m^2-n^2}-\frac{m^2 z^2}{m^2-n^2}}}$. Integralia igitur horumce Differentialium aeque inveniuntur ope arcus Ellipseos multiplicati per $\sqrt{\frac{fk-gh}{hk^2}}$ ob signum mutatum τȣ g, aliis omnibus manentibus, et eâdem, uti superius, constructione parata, semperque deducta a Pascalii Theoremate.

38. Diversimode procedit res in Hyperbola. Haec etenim Curva ad secundum Axem aequatione gaudet $\frac{2a'}{p} \cdot y^2 = a'^2 + x^2$, sed ad primum, signo permutato, $\frac{2a''}{p'} \cdot y^2 = -a''^2 + x^2$. Ut exordiar a priori, in aperto est per ea, quae innuimus in fine §^{i}. 23^{ii}. et in 33^{io}., enasci ab aequatione ad Ellipsin ficto huius Semiaxe $a' = a'\sqrt{-1}$. Sed arcus infinite-parvus Ellipseos ad secundum Axem relatae est ex §^{o}. 36to. $\frac{dx\sqrt{a'^2+\left(\frac{p}{2a'}-1\right)x^2}}{\sqrt{a'^2-x^2}}$ $= \frac{dx\sqrt{a'^2+\left(\frac{b^2}{a'^2}-1\right)x^2}}{\sqrt{a'^2-x^2}}$, supposito b Semiaxe coniugato. Igitur arcus infinite-parvus Hyperbolae, dum referatur ad Axem secundum, est

$$ds' = \frac{dx\sqrt{-a'^2-\left(\frac{b^2}{a'^2}+1\right)x^2}}{\sqrt{-a'^2-x^2}} = \frac{dx\sqrt{a'^2+\left(\frac{p}{2a'}+1\right)x^2}}{\sqrt{a'^2+x^2}},$$ abscissis

x a centro pariter computatis. Formula isthaec, tametsi a Triangulo differentiali Hyperbolico haudquaquam derivetur, adeo consentit cum ea ab Analystis prolata (150), ut miraculo fere proxima videatur. Lucem etiam perquam maximam ab hac Formula mutuantur Differentialia, de quibus sermo in §§^{ii}. antecedentibus. Namque eadem Differentialia hoc in casu ita composita sunt

$$\frac{mdz}{\sqrt{m^2 \pm n^2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{m^2 a^2}{m^2 \pm n^2} + \left(\frac{m^2 \pm n^2}{m^2} + 1\right) \frac{m^2 z^2}{m^2 \pm n^2}}}{\sqrt{\frac{m^2 a^2}{m^2 \pm n^2} + \frac{m^2 z^2}{m^2 \pm n^2}}}$$, vel potius

$$\frac{dz\sqrt{m^2 a^2 + (2m^2 \pm n^2)z^2}}{\sqrt{m^2 \pm n^2}\sqrt{a^2 + z^2}}$$, ac denique $\frac{dx\sqrt{f + gx^2}}{\sqrt{h + kx^2}}$. Eâdem igitur ratione, qua $\int \frac{dx\sqrt{f + gx^2}}{\sqrt{h - kx^2}}$ pendet ab arcu conicae Ellipseos ad secundum Axim relatae, $\int \frac{dx\sqrt{f + gx^2}}{\sqrt{h + kx^2}}$ obtinetur ab arcu Hyperbolae conicae ad secundum Axim dispositae, iis tamen servatis limitationibus, de quibus infra dicendum.

39. Ut complectantur fructus colligendi a doctrina ipsa Pascalii, de Hyperbola etiam loquendum remanet super eius primum Axem disposita. Aequatio Ellipseos est $\frac{2a'}{p} \cdot y^2 = a'^2 - x^2$, sive $\frac{a'^2}{b^2} \cdot y^2 = a'^2 - x^2$, quae facile convertitur ad morem §[i]. 24[ti]. in aequationem ad Hyperbolam dum, ceteris omnibus manentibus, fiat Semiaxis coniugatus $b = b\sqrt{-1}$, quum eo casu sit $\frac{a'^2}{-b^2} \cdot y^2 = a'^2 - x^2$ vel $\frac{a'^2}{b^2} \cdot y^2 = x^2 - a'^2$. Differentiale itaque τὸ $\frac{dx\sqrt{a''^2 + \left(\frac{p'}{2a''} - 1\right)x^2}}{\sqrt{a''^2 - x^2}}$, scilicet, $\frac{dx\sqrt{a''^2 + \left(\frac{b^2}{a''^2} - 1\right)x^2}}{\sqrt{a''^2 - x^2}}$, quod ad mentem §[i]. 37[mi]. praebet arcum infinite-parvum Ellipseos, suppeditabit elementum perimetri Hyperbolae statim atque ita scribatur

$$\frac{dx\sqrt{a''^2 - \left(\frac{b^2}{a''^2} + 1\right)x^2}}{\sqrt{a''^2 - x^2}} = \frac{dx\sqrt{\left(\frac{p'}{2a''} + 1\right)x^2 - a''^2}}{\sqrt{x^2 - a''^2}}$$. Dum ergo in locum variabilis x subeat qz, exsurget $\int \frac{qdz\sqrt{\left(\frac{p'}{2a''} + 1\right)q^2 z^2 - a''^2}}{\sqrt{q^2 z^2 - a''^2}}$, sive

$\int$

$$\int \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{q dz \sqrt{\left(\frac{p'}{2a''}+1\right) q^2 z^2 - a''^2}}{\sqrt{q^2 z^2 - a''^2}}$$, aut

$$q \int \frac{dz \sqrt{m\left(\frac{p'}{2a''}+1\right) q^2 z^2 - m a''^2}}{\sqrt{n q^2 z^2 - n a''^2}}$$, vel demum universalius

$\int \frac{dx\sqrt{gx^2 - f}}{\sqrt{kx^2 - h}}$; quod Integrale a rectificatione arcus Hyperbolae dependebit. Observandum tamen est, quod prima fronte *paradoxon* adparet, Integrale huius formae $\int \frac{dx\sqrt{gx^2 - f}}{\sqrt{kx^2 - h}}$ reapse idem esse, permutatis signis tam in Numeratore, quam in Denominatore, ac illud in §°. 37mo. memoratum $\int \frac{dx\sqrt{f - gx^2}}{\sqrt{h - kx^2}}$, et idcirco hac gemina expressione Integralia proposita unum ac idem significare, unde consequeretur incertum futurum iri an ope Ellipseos, an ope Hyperbolae summarentur. Tollitur vero difficultas omnis a Coëfficientium comparatione, quae comparatio *criterium* tribuit ad dignoscendum quando ab Ellipsi, quando ab Hyperbola Integrale ipsum pendeat, veluti obiter dicam postea quam de inventis Riccati, Euleri, ac Lexellii in §°. 44to. mentionem inierim (151).

40. Fundamenta iam posui in Superficie Cylindri scaleni (nimirum in Elementis Geometriae (152)) praestantissimae illius partis Calculi Summatorii, quae cognationem intimam habeat cum arcubus Ellipseos et Hyperbolae. Ceterae omnes Functiones *differentiales* arcuum ipsorum praesidio integrabiles ad primas reducuntur hactenus explicatas, et facillima artificia analytica ad hoc consequendum exstant in vulgatis Operibus de Calculo infinite-parvorum. Nihilo tamen minus ordinem temporum sequens nonnulla delibabo vel ut novis adcessionibus res suapte natura elegantissima eo magis effulgeat, vel ut inutilibus ramis amputatis feliciores fructus inserat doctrina Pascalii. In hac provincia exornanda omnibus vere praeivit Iacobus Bernoullius, tametsi Iulius Carolus Fagnanus ab Auctoribus *Institutionum Analyseos* Bononiae editarum anr M.DCC.LXVII°. pri-

 mas

mas tenere nunciatus fuerit, quemadmodum scripserunt in Praefatione Voluminis II[i]. (pag[a]. VI[a].), et rursus in Capite XII[mo]. (pag[a]. 191[ma].). Ille etenim usque ab anno M.DC.XCIV[o]. versans *Isochronam-paracentricam* a Leibnitio propositam adseruit $\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{z^4 - a^4}}$ obtineri posse ope Lineae Hyperbolicae (153). Quod equidem recte persensit. Namque facto $z^2 = ax$, evadit $\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{z^4 - a^4}} = \int \frac{dx \sqrt{x} \cdot \sqrt{a}}{2\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{a}}{2} \int \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, quod ex iam dictis in §[o]. 34[o]. ab arcu Hyperbolae aequilaterae pendet. Summo autem ut erat ingenii acumine praeditus aeque non vidit a rectificatione Coni-sectionum consequi etiam Integralia $\int \frac{a^2 dz}{\sqrt{z^4 - a^4}}$, $\int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}$, et $\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}$, quorum duo prima ab arcubus Lemniscatae suae, tertium ab arcubus simul eiusdem Curvae novae atque Ellipseos derivari tantummodo indigitavit (154). Linea illa percelebris (155) eodem ferme tempore inventa fuit a Cl. fratribus Iacobo et Ioanne Bernoulliis (156). In aperto enim est Aequationem ipsius Lineae ab Iacobo traditam $xx + yy = a\sqrt{xx - yy}$ ad unguem cohaerere descriptioni graphicae ab Ioanne prolatae, qui vult abscissas pares esse $\sqrt{az + zz}$, nimirum ordinatis ad Hyperbolam aequilateram, ac vicissim ordinatas $= \sqrt{az - zz}$, nempe ordinatis ad Ellipsin aequilateram, sive Circulum pertinentibus. Facili calculo inito, ex Aequationibus $\sqrt{az + zz} = x$, ac $\sqrt{az - zz} = y$ emergunt $x^2 + y^2 = 2az$, et $x^2 - y^2 = 2z^2$, scilicet $\left(\frac{x^2 + y^2}{2a}\right) = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{2}}$, vel denique $x^2 + y^2 = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 - y^2}$, ac supposito $b^2 = 2a^2$, oritur $x^2 + y^2 = b\sqrt{x^2 - y^2}$ uti superius (157). Haec omnia viam equidem straverunt Fagnano in tentamine pulcherrimo rectificationis Lemniscatae, quod primum edidit vertente anno M.DCC.XVIII[o]. in *Diario Litteratorum Italico* (158). Sed methodum potius syntheticam, quam analyticam sequutus Fagnanus, quae postmodum Maclaurino etiam pla-

cuit

cuit (159), non potui quin dubitarem quod inventionis suae artificium absconderit; illudque nativae simplicitati, si coniecturae locus sit post inventum simile ac pene idem Iacobi Bernoullii ex *Actis Lipsiensibus* Fagnano cognitum, aut facile cognoscendum, hunc in modum restituere satago. Arcus non unius Lemniscatae, verum etiam simplicissimae Curvarum Elasticarum vel Lintearium (160) exprimitur a Formula

$$\int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} = \int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^2 - z^2} \cdot \sqrt{a^2 + z^2}} = \int \frac{dz\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}} -$$

$\int \frac{dz \cdot z^2}{\sqrt{a^2 + z^2} \cdot \sqrt{a^2 - z^2}}$, uti constat ex Elementis. Habetur autem a Theoremate Pascalii per $\S^{um}$. 36^{tum}. Integralium eorundem primum $\int \frac{dz\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}}$ praesidio arcus Ellipseos. Restat igitur ut resolvatur secundum. Est autem $\int \frac{dz \cdot z^2}{\sqrt{a^2 + z^2} \cdot \sqrt{a^2 - z^2}} = \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} =$

$\frac{\sqrt{a}}{2} \int \frac{dx \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, supposito $z^2 = ax$ ad homogeneitatis legem servandam, quod postremum Integrale per $\S^{um}$. 34^{tum}. refertur ad arcum Hyperbolae aequilaterae ex deductis ab ipsa Pascalii doctrina (161), simul cum Linea recta negativa algebraice *data*. Duobus igitur pene versiculis tota res absolvitur de Lemniscata rectificanda, necnon de Curva Elastica aut Lintearia, cuius Aequatio sit $dy = \frac{\mp z^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}$, cunctaque mirum in modum consentiunt cum iis a Fagnano et Maclaurino longius explicatis (162). Pascalio itaque duce non duntaxat unicum Integrale $\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{z^4 - a^4}}$, quod Iacobus Bernoullius symbolum arcus Hyperbolae Apollonianae esse adfirmaverat, sed cetera quoque $\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}$, $\int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}$, $\int \frac{a^2 dz}{\sqrt{z^4 - a^4}}$ ad constructionem facile perducuntur

hoc

hoc ordine servato. Primum, quod Bernoullius ipse edixerat dependere ab arcubus simul Lemniscatae et Ellipseos, pendet tantummodo ab arcu Hyperbolae, et Linea recta (163): secundum, quod ab arcu Lemniscatae consequitur iuxta Bernoullium, notum fit praesidio arcus Ellipseos, Hyperbolae, et rectae Lineae: tertium denique, quod pariter ope arcus Lemniscatae dignosci adseruit idem Bernoullius, ad secundi formam reducitur si supponatur $z = \frac{a^2}{u}$, quo facto reapse convertitur in $\int \frac{-a^2\,du}{\sqrt{a^4 - u^4}}$. Neque inter Fagnani inventa illud reponendum censeo τὸ $\int dx \,.\, \sqrt{1 + x^4}$, nimirum arcus primae Parabolae *cubicalis* (164), pendentis a Lemniscatae rectificatione, ideoque Ellipseos et Hyperbolae. Ioannes enim Bernoullius multis retro annis idipsum invenerat loquens de Curva $z = \sqrt{y^4 + a^4}$, et redarguens humanissime, uti decet, Leibnitium proptereaquod adseruerit τὸ $\int dy \sqrt{y^4 + a^4}$ idem esse cum arcu Hyperbolae Apollonianae (165).

41. Dum Lemniscatam tracto lectorem non pigeat aliqua me commentari de hac Curva in recentiorum Geometrarum historia summis laudibus praedicata ob admiranda eius symptomata (166). Occurrit primum disseruisse Fagnanum de Lemniscata Bernoulliorum, veruntamen errasse in huius Aequatione adserenda, quam ita exposuit $xx = a\sqrt{xx - yy}$, sive $x^4 - a^2x^2 + a^2y^2 = 0$ in *Diario* nuperrime memorato (167). Haec etenim Linea altera est, sed simplicior ac diversissima Lemniscata, cuius proprietates praecipuas et Alembertus dedit in *Encyclopedia* (168), et ego fusius alio loco explicavi (169). Istam vero prae omnibus Lemniscatis antiquiorem censeo, quum ichnographia sit Curvae Cyclocylindricae *primariae* totum Cylindrum rectum complectentis (170), sive Circuli Cylindrici uno circini ductu depicti ac dimensi a Cl. Robervallio ante dimidium praeteriti saeculi (171). Facilis etiam ope Circuli eius descriptio graphica in Plano per puncta. Resoluta quippe Aequatione in Proportionem $a^2 : x^2 :: a^2 - x^2 : y^2$, patet quod si describatur Circulus *ABCD* (Fig^a. 34^a.), cuius radius $IB = a$, et ducantur in Quadrante quotlibuerit Ordinatae

EF,

$EF, E'F', E''F'', E'''F'''$ etc., et harum quaevis dividatur in O, O', O'', O''' etc. uti radius IB in F, F', F'', F''' etc., erunt puncta O, O', O'', O''' etc. in Curva quaesita. Quae proportionalis sectio obtinetur emissis a centro I ad puncta R, R', R'', R''' etc. occursuum rectarum $ER, E'R', E''R'', E'''R'''$ etc. perpendicularium tangenti BG rectis lineis IR, IR', IR'', IR''' etc. ex triangulorum similitudine; istaque describendi methodus nos docet quatuor aequalibus et similiter positis partibus circa nodum I constare Curvam, tangentes eius in B ac D esse ad eius axem normales, tangentes GIL, MIK in nodo I ad normam esse inter se, et ideo quo ad axem DIB ad angulum semi-rectum inclinatas, Ordinatam Circuli $E'F'$ bisecantem radium IB bifariam secari a Curva in O', ac totam Curvam nodatam $IO''BNIQDPI$ intra angulos rectos ad verticem oppositos HIK, MIL comprehendi, et in consequentibus pariter rectis HIM, KIL nullam eius partem existere. Sed Lemniscata ipsa trigonometrice quoque institui poterit. Dum etenim arcus Circuli AE, AE', AE'', AE''' etc. vocetur φ, et radius aut semiaxis $IB = 1$, erit Ordinata quaelibet Lemniscatae $OF, O'F', O''F'', O'''F'''$ etc. $= Sin.\varphi \times Cos.\varphi = \frac{Sin.2\varphi}{2}$. Aliter etiam, si placeat Aequationem Lemniscatae quo ad coordinatas orthogonales convertere in Aequationem circa *focum* I compositam, vocatis radiis IO''', IO'', IO', IO etc. $= z$, angulisque BIO''', BIO'', BIO', BIO etc. $= \varphi$, erit $z^2.\ Cos.^4\varphi - a^2.\ Cos.^2\varphi + a^2.\ Sin.^2\varphi = 0$, sive $z = \pm a.\frac{\sqrt{Cos.2\varphi}}{Cos.^2\varphi}$, qua nec simplicior, nec elegantior ad Curvae proprietates investigandas (172). Porro qui rite tractaverit Lemniscatam celebriorem Bernoullianam ipsimet eius descriptioni a solo Circulo derivatae obviam ibit, quam iamdudum dedit Maclaurinus, sed ab Hyperbolae aequilaterae adfectionibus diductam (173). Haec namque Curva (Figª. 35.) ad Axes praecipuos DIC, KIH invicem normales relata, in qua $IC = a$, $IB = x$, $BA = y$, est, uti neminem latet, $(x^2+y^2)^2 - a^2x^2 + a^2y^2 = 0$, vel potius $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2+y^2) + 2a^2y^2 = 0$ sive, vocato radio quolibet $IA = z$, et angulo $CIA = \varphi$, $z^2 - a^2 + 2a^2.\ Sin.^2\varphi = 0$, aut $z = \pm a\sqrt{1 - 2Sin.^2.\varphi} = \pm a\sqrt{Cos.2\varphi}$, nimirum numeratori valoris τῦ z alius Lemniscatae (174). Dato nunc Circulo quovis $NGLY$, cuius centrum M, ac producto radio ML donec in I sit

sit MI ad ML ut diagonalis ad latus Quadrati, et ex puncto I emissis secantibus sine numero ITR, IXS, IUY etc., sectisque $IZ = RT$, $IV = XS = IE$, $IF = YU = IA$ etc., erunt puncta Z, V, E, F, A etc. in Lemniscata, habente diametrum Circuli NL aequalem suo Semiaxi ID aut IC ex constructione. Quod ut ostendam, sit chorda LQ parallela alteri TR; sit MOP normalis ad chordas istas; et ducta chorda altera QN, habebitur $RP^2 = QO^2 + OM^2 - PM^2$, scilicet, ob parallelas et constructionem $RP^2 = QO^2 - OM^2$, et sumptis quadruplis, $RT^2 = IZ^2 = LQ^2 - QN^2$, ac vocatis de more $LN = ID = a$, $IZ = z$, atque angulo $NLQ = DIZ = \varphi$, orietur $z^2 = a^2 . Cos.^2\varphi - a^2 . Sin.^2\varphi = 2a^2 . Cos.^2\varphi - a^2$, sive $z = \pm a\sqrt{2 Cos.^2\varphi - 1} = \pm a\sqrt{Cos. 2\varphi}$, uti superius (175). A descriptionis modo, quo utimur, liquet tangentes a nodo I ad Circumferentiam emissas Circuli genitoris, nimirum $\Lambda I\Gamma$, $\Delta I\Pi$ tangere quoque quatuor similes et aequales Lemniscatae ramos, ac se componere ad angulos rectos, prouti dictum de altera simpliciore Lemniscata, quum per hypothesin sit $IM^2 = 2M\Lambda^2$, ideoque $M\Lambda I\Delta$ Quadratum (176). Duo igitur diversissimae Lemniscatae in communi nodo I se mutuo tangent, communemque adfectionem habebunt in hoc, quod utriusque rami se mutuo secent normaliter, et angulum semirectum efficiant cum Axe. Praeterea patet quod genitoris Circuli Peripheria adeo secet perimetrum Lemniscatae in X, X' ut non modo secantes IXG, $IX'G'$ bifariam divisae sint in punctis iisdem X, X', verum etiam totae adaequent IM distantiam centri Genitoris a *nodo*. Revera $I\Lambda^2 = \frac{IM^2}{2}$, et $I\Lambda^2 = GI . IX = \frac{GI^2}{2}$, unde consequitur tam IM, quam IG esse radios eiusdem Circuli. Hic Circulus GMG' idem est ac ille Ioannis Bernoullii (177), et idcirco puncta Φ, Φ' Lemniscatae ea erunt *maximi* Curvae recessus ab Axe, tangentiumque Axi parallelarum ex iam dictis, et ex Trianguli aequilateri $I\Phi\Phi'$ inscripti origine consequuta (178). Namque $ID^4 = LN^4 = 4LM^4 = 2IM^4$, videlicet $ID : IM :: IM : ML :: \sqrt{2} : 1$. Punctum autem ipsum M, aliudque M' aequidistans a nodo I perinsigni gaudent proprietate, in qua contemplanda paucis immorabor. Haec puncta sunt *umbilici* duo Lemniscatae, a quibus si ad perimetrum Curvae gemini radii ducantur, sit semper constans Rectangulum MV in VM', nimirum aequale Quadrato τῦ MI semi-distantiae *umbilicorum* eorundem

rundem

rundem, vel ex hypothesi $= \frac{DI^2}{2}$. De puncto D aut C ne dubitandum quidem, quum $M'D \,.\, DM = CM \,.\, MD = DI^2 - MI^2 = 2MI^2 - MI^2 = MI^2 = MI \,.\, M'I$. Pro puncto autem quolibet V, dum emittatur $V\Omega$ normalis ad Axem, erunt $M'V^2 + MV^2 = a^2\,(2\,Cos.\,2\varphi + 1)$, et $M'V^2 - MV^2 = \frac{4a^2}{\sqrt{2}}\,(\sqrt{Cos.\,2\varphi}\,.\,Cos.\,\varphi)$ per Elementa. Igitur $M'V^2 = a^2\,(Cos.\,2\varphi + \frac{1}{2} + \sqrt{2}\,(\sqrt{Cos.\,2\varphi}\,.\,Cos.\,\varphi))$, atque $MV^2 = a^2\,(Cos.\,2\varphi + \frac{1}{2} - \sqrt{2}\,(\sqrt{Cos.\,2\varphi}\,.\,Cos.\,\varphi))$, et ideo oritur evidentissime $M'V^2 \,.\, MV^2 = a^4 \left((Cos.\,2\varphi + \frac{1}{2})^2 - 2\,.\,Cos.\,2\varphi\,.\,Cos.^2\varphi\right) = a^4\left((2\,Cos.^2\varphi - \frac{1}{2})^2 - 2\,(2\,Cos.^2\varphi - 1)\,Cos.^2\varphi\right) = \frac{a^4}{4}$, videlicet $M'V \,.\, MV = \frac{a^2}{2} = IM^2$, quemadmodum mihi demonstrandum proposui. Lemniscata ergo Bernoulliorum et Fagnani species est Curvae Cassinianae (179) in Astronomiae fastis celebratissimae, tametsi malis avibus auspicatae (180). Quae Cassini et Bernoulliorum Lineae cognatio Davidi Gregoryo de illa bis disserenti incognita fuit (181), sed postmodum Abbati de Gua (182), et deinde Alemberto in *Encyclopedia Parisiensi* (183) patuit, nemine tamen eam derivante ab Aequatione Curvae Bernoullianae simplicissima ad *nodum* seu centrum relata, prouti mihi contigit (184), potiusquam ab Aequatione, quae referatur ad proprietatem praecognitam Cassinianae pertinentem ad *focos* sive *umbilicos* (185). Sciendum est etiam differre valde inter se duas hasce Lemniscatae Aequationes, quarum facillima et elegantissima $(x^2 + y^2)^2 + a^2\,(y^2 - x^2) = 0$ abscissis computatis a *nodo*, altera $(x^2 + y^2)^2 + (2a^2 - 2\sqrt{2}\,.\,ax)\,(x^2 + y^2) - \frac{a^4}{4} = 0$, sive $(x^2 + y^2)^2 + (4b^2 - 4bx)\,(x^2 + y^2) - b^4 = 0$ dum, supposito $b^2 = \frac{a^2}{2}$, abscissae numerentur a *foco*. Praeterea Aequatiò illa omnium simplicissima $z = \pm a\sqrt{Cos.\,2\varphi}$ recto quoque itinere ducit ad consequendam Lemniscatae quadraturam, de qua fusius egit Fagnanus (186). Elementum etenim areae, eductis radiis infinite proximis a centro I, est $\frac{a^2}{2}\,.\,Cos.\,2\varphi\,.\,d\varphi$, scilicet,

$\frac{a^2 d\varphi}{}$

$\frac{a^2 d\phi}{2} - a^2 . Sin.^2 \phi . d\phi$; ideoque Integrale ex Elementis Calculi Summatorii $= \frac{a^2}{2} . Sin. \phi . Cos. \phi$. Medietas ergo Areae Folii unius e duobus Lemniscatae, facto angulo $\phi = 45^\circ$., evadit aequalis $\frac{a^2}{2} . \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{4}$, sive quartae parti Quadrati Semiaxis; integrum Folium $= \frac{a^2}{2}$ vel Areae Rectangulorum cuiusvis $MV.VM'$; et duo simul Folia, nimirum tota Curvae area par est Semiaxis Quadrato. Et area tota prioris Lemniscatae ad aream totam Bernoullianae in ratione erit sesqui-tertia, quum prima sit $= \frac{4a^2}{3}$ (187). Mea autem Formula ad *indefinitam* quoque perducit Lemniscatae Bernoulliorum quadraturam, proptereaquod area cuiuslibet Sectoris centrici $CI\mu$, $CI\nu$ etc. aequetur Triangulo orthogonio $CI\theta$, $CI\beta$ etc. inscripto in Semicirculo $I\sigma\beta\theta C$ diametrum habente IC Semiaxem. Sane $C\theta$, $C\beta$ etc. $= a\,Sin.\,\phi$; $I\theta$, $I\beta$ etc. $= a\,Cosin\,\phi$; et $CI\theta$, $CI\beta$ etc. $= \frac{a^2}{2} . Sin. \phi . Cos. \phi$ uti supra. Exinde confirmatur mensura areae totius, quum Triangulum $C\lambda I$ ob angulum in *nodo* I semirectum aream habeat aequalem $\frac{I\lambda^2}{2}$ vel $\frac{IC^2}{4}$ non secus ac est superius inventum. Quae Sectorum omnium centralium quadratura, Fagnano invisa, adeo facilis et elegans mihi videtur, ut nullam cum ea comparandam repererim in Geometria. Proprietatibus ipsius Lineae adscribenda est etiam affectio vere iucundissima radiorum quorumvis a *focis* emissorum MV, $M'V$: si puncta etenim occursuum (vel punctum unicum dum radius tangens Curvae fuerit) δ, ϵ coniungantur cum *foco* M ope radiorum $M\delta$, $M\epsilon$, et a δ, ϵ ducantur $\delta\gamma$, $\epsilon\eta$ parallelae radio MV, erit semper MV media geometrice proportionalis inter $M\delta$, $\delta\gamma$, necnon $M\epsilon$, $\epsilon\eta$. Namque $MV.VM' = M\delta.\delta M' = M\epsilon.\epsilon M'$, et idcirco $M\delta : MV :: VM' : \delta M' :: MV : \delta\gamma$, ac similiter $M\epsilon : MV :: VM' : \epsilon M' :: MV : \epsilon\eta$ ob parallelas. Accedit quod haec Lemniscata enascatur invertendo proprietatem *localem* Circumferentiae Circuli in toties citato Problemate *Dialogorum* Galilei, vel etiam simplicius et ad rem aptius rectae Lineae IIK perpendicularis ad alteram DIC, quae consistit in $M\Theta : MI :: \Theta M' : IM'$, dum ex opposito in ea Curva $MV : MI :: IM' : VM'$, quemadmo-

admodum si proportio geometrica ad Lineam rectam abscissas inter et ordinatas invertatur, ipsa recta convertitur in Hyperbolam ad asymptotas (188). Nec praetereundum censeo quod generatio ipsa Lemniscatae methodo Maclaurini suadeat absconditam veluti inesse proprietatem Cassinianae, quum rectangula $NI.IL, RI.IT, SI.IX'', \Lambda I.I\Lambda$ etc. aequalia sint inter se ex Elementis, et ex demonstratis aequalia $\frac{MI.IM'}{2} = \frac{MI^2}{2} = \frac{DI^2}{4} =$ Areae Hemifolii. Et geminato ex parte altera centro M' ac Circulo genitore, erunt Rectangula $NI.LL'$, $RI.TT'$, $SI.X''X'$ etc. non modo aequalia inter se, verum etiam Rectangulo constanti $MV.VM'$, atque Areae unius Folii. Contemplari autem licet Bipetalon istud Bernoulliorum utpote foret inversae originis comparatiooe habita ad ortum duorum Semicirculorum $\Sigma\Xi\Psi, \Sigma'\Xi'\Psi'$ concentricorum geminis Geoitoribus, radiisque $MI, M'I$ praeditorum. Eo quippe modo, quo Semicirculi oriuntur a Circulis genitoribus si fiat $I\Xi = IN + IL$, $I\vartheta = IR + IT$, $Ik = IS + IX''$, $I\Psi = I\Lambda + I\Lambda = 2I\Lambda$ etc., quum ex constructione praemissa et Elementis constet rectum esse angulum $\Xi M\Psi$, et aequales ubique inter se rectas omnes $M\Xi$, $M\vartheta$, Mk, $M\Psi$ etc., non dissimiliter enascitur Lemniscata si Summarum vice Differentiae sumantur $ID = IN - IL$, $IZ = IR - IT$, $IV = IS - IX''$, $o = I\Lambda - I\Lambda$ etc., uti primus docuit Maclaurinus. In qua comparatione est admodum singulare Locum geometricum bifariam secantem rectas innumeras, uti $D\Xi$, $Z\vartheta$, Vk etc., inter perimetros Folii unius et Semicirculi $\Sigma\Xi\Psi$, esse Peripheriam trium Quadrantum Circuli genitoris, rectamque $IXG\zeta$, quemadmodum in aliis tribus Hemifoliis, esse in tres partes aequales divisam. Dum vero ad instar Cassinianae libeat describere Lemniscatam, praesto erit methodus simplicior illa nuper a Malfatto vulgata (189). Ad hoc enim consequendum sufficiet descriptio Circuli $DKCH$ axem Lemniscatae pro diametro habentis, in qua determinentur puncta M, M' aeque a centro distantia ita, ut MM' sit latus ioscripti Quadrati. Tum per M traiecta qualibet recta $\vartheta' M \pi$, si centris M, M', radiis $M\vartheta', M\pi$ Circumferentiae circulares delineentur, occursus earum erunt in Lemniscara. Tribus igitur Circulis obtinetur id, quod quatuor Circulis Malfattus universaliter construendum instituerar. Constructio autem valde elegantior a Maclaurino tradita stimulos addit ad eam

 promo-

promovendam. Dato quolibet Circulo $ABDC$ (Fig[a]. 36.), et puncto extremo I, aut I' ubilibet collocato, ac constructione eàdem servata $IE = AD$, $IH = KF$, $IR = GR$ etc., orietur semper una ex innumeris Lemniscatis, e quarum familia est illa Bernoulliorum. Graciliora erunt eiusdem Folia quo magis punctum I recedat a T pertinente ad Bernoullianam; crassiora quo magis punctum I' citra T ad A accesserit. Puncto I infinities recedente, gracilitas accidit summa, quum Curva in rectam EIL convertatur: accedente I' infinities ad A, crassities evenit maxima, quum Folia duo Lemniscatae vertantur in Circulos genitores se mutuo contingentes in A. Angulus tangentium in *nodo* vel centro Curvae est idem cum CIB, vel $C'I'B'$ a tangentibus Circuli genitoris determinatus. Aequatio Lemniscatarum omnium huiusce generis $IERIMLN$ invenitur ut supra. Namque ducta chorda AS parallela radio Curvae IH, necnon chorda alia SD, et a centro O perpendiculari OQP, atque vocatis $IE = IL = a$, $IH = z$, angulo $EIH = \varphi$, ac demum $IO^2 : AO^2 :: n : 1$ (idem intelligatur de puncto I'), erit $KF^2 = IH^2 = z^2 = AS^2 + SD^2 - 4OP^2 =$

$a^2 - \frac{n}{1} . 4OQ^2 = a^2 - n . SD^2 = a^2 - a^2 . n . Sin^2 . \varphi$ ubi $n > 1$, et idcirco

$z = \pm a\sqrt{1 - n . Sin^2 . \varphi}$, in qua continetur Lemniscata Bernoulliorum respondens hypothesi τῷ $n = 2$. Nec difficilior inventio Aequationis generalissimae Curvae ipsius relatae ad coordinatas orthogonales tum, quum abscissae x a centro I computentur. Porro facili calculo inito emerget $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 + y^2) + na^2y^2 = 0$, vel $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 + y^2) + b^2y^2 = 0$, quae denuo monstrat in singulari suppositione τῷ $n = 2$, sive $b^2 = 2a^2$, Lemniscatam Bernoullianam. Eàdem praeterea ratione, qua per Maclaurinum universitas harumce Lemniscatarum oritur a punctis innumeris intersectionum rectarum tangentium innumeras Hyperbolas Apollonianas, iisdem verticibus, et axe transverso gaudentes, et perpendicularium ad ipsas tangentes emissarum a centro communi, non diversimode quaenam Curvae enascantur ab iisdem intersectionibus in Ellipsibus remanet investigandum. Inter Lemniscatas ab Hyperbolis sine numero *scalenis* originem ducentes eminet ac media ferme iacet Bernoulliana, quae nascitur ab Hyperbola aequilatera: consimiliter in Curvis ab Ellipsibus *scalenis* ortum habentibus distinguitur Circu-

Li

li circumferentia derivata ab Ellipsi aequilatera. Aequatio Linearum ab Ellipsibus eodem axe transverso, ac verticibus, et centro Hyperbolarum praeditis (190), est ipsamet superius exposita $z = \pm a\sqrt{1 - n . Sin^2 \varphi}$, sive $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 + y^2) + na^2 y^2 = 0$, abscissis computatis pariter a centro Curvae, sed hoc tantum discrimine quod sit $n < 1$. Familia itaque istarum omnium Curvarum *analogarum* comprehenditur ab Aequatione universali quarti gradus. et huius formae $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 + y^2) + b^2 y^2 = 0$: species autem sunt triplices ab hypothesibus diducendae τῆ $b^2 = a^2$, $b^2 > a^2$, $b^2 < a^2$; atque hae primitivae species ratione diversitatis figurarum in alias subdividuntur. Eandem familiam haec etiam brevior Aequatio complectitur $z = \pm a\sqrt{1 - n . Sin^2 . \varphi}$, vel $z = \pm a\sqrt{Cos^2 . \varphi - (n - 1) Sin^2 . \varphi}$, sive tandem $z = \pm a\sqrt{1 - \frac{n}{2}(1 + Cos. 2\varphi)}$, hypothesi quoque triplici subiicienda τῆ $n = 1$, $n > 1$, $n < 1$. Bini Circuli se mutuo tangentes, ac Lemniscatam veluti imitantes, prodeunt ab hypothesi omnium facillima $n = 1$ seu $b^2 = a^2$, quippe tum evadat Aequatio $z = \pm a Cosin. \varphi$, vel $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2$. Lemniscata Bernoulliorum adparet in hypothesi $n = 2$, sive $b^2 = 2a^2$, quum Aequationes illae vertantur in $z = \pm a\sqrt{Cos. 2\varphi}$, et $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$. Linea recta Lemniscatarum gracilissima emergit ab hypothesi $n = \infty$, aut $b^2 = \infty . a^2$; tunc enim, utcumque parvus assumeretur angulus φ, fit τὸ z semper *imaginarium*, et $\infty . a^2 y^2 = 0$, seu $a^2 y^2 = 0$, vel $\pm y = 0$. Adest denique unica Circuli circumferentia pro altero Curvarum *limite* in hypothesi $n = 0$, sive $b^2 = 0$, propterea quod Aequatio vertatur in $z = \pm a$, vel $x^2 + y^2 - a^2 = 0$. Quemadmodum ultimus limes Lemniscatarum ab Hyperbolis enascentium est Linea recta *LIE* (Fig^ae. 36. 37.), et ex altera parte Lemniscata *spuria* sive Systema duorum Circulorum *ITLX*, *IYEZ* sese tangentium in *I nodo* communi Curvarum, ita geminatus hic Circulus, et Circulus alter *LΦEΨ* radium habens aequalem semiaxi Curvarum omnium, ac centrum in puncto eodem *I*, extremi sunt limites, inter quos iacent Lineae ab Ellipsibus derivatae. Constructio istarum praesidio Circuli dati *ARBDCGA* obtinetur eodem modo, quo supra, dummodo punctum *I*, quod tunc erat exterius, in interius

rius vertatur. Ductis etenim per punctum I innumeris chordis, samptisque $IE = ID + IA$, $IH = IF + IK$, $I\Theta = I\Omega + I\theta$, $IC' = IC + IC'$ etc., $IR' = IG + IR = 2IG$, oritur Curva in se rediens, plus minusve rostrata atque inflexa, plus minusve compressa, ac quatuor aequalibus et similibus partibus circa centrum I dispositis coalescens, cuius Aequatio inter IH aut z, et angulum EIH seu φ, sit $z = \pm a\sqrt{1 - n . Sin^2 . \varphi}$; $\frac{n}{1} = \frac{IO^2}{AO^2}$; et Aequatio inter $IM = x$, atque $MH = y$, sit $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 + y^2) + na^2y^2 = 0$, prouti repetita earundem litterarum auxilio eâdem demonstratione luculentissime constat. In prioribus Lineis differentiae rectarum a puncto I externo ad Circumferentiam Circuli emissarum sunt Linearum earundem radii, summaeque ad Circumferentias sunt Circulo generatori concentricas. Ex adverso in secundis Lineis summae rectarum a puncto interno I eductarum sunt earundem radii, ac differentiae ad Circumferentias genitrici concentricas pertinent, quemadmodum Schema demonstrat. De ceteris Curvarum harumce adfectionibus alibi locus erit fusius loquendi, quum sint e Linearum Persei familia (191). Adnotasse tamen iuverit universa haec de Curvis istis obiter tradita prodiisse ab ipsis secantibus Circuli, a quibus originem noscit suam Theorema Pascalii.

42. Non multo post Fagnani labores optime meritus est Maclaurinus de doctrina Integralium ab arcubus Sectionum Conicarum derivandorum. Is etenim usque ab anno M.DCC.XLII[d], in *Tractatu Fluxionum* (192) egregia dedit ac cedro digna de hoc argumento, non secus ac subtiliter admodum et ingeniose una cum Rogero Cotesio universam Analysin Newtonianam ditaverat, atque perfecerat. Par autem intervallum vigintiquatuor adamussim annorum numeratur ab inventis Iacobi Bernoullii ad illa Fagnani, prouti ab his ad inventa Maclaurini. Formulae, quae ab ipso Maclaurino integrantur tota Calculi Differentialis arte in subsidium vocata (193), et progressu facto, uti Syntheticorum ordo poscit, a facilioribus ad difficiliores sunt praesertim *binomiales* $\frac{dx . \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $\frac{dx . \sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\frac{dx . \sqrt{x}}{\sqrt{1 + x^2}}$, $\frac{dx}{(1 + x^2)^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{dx}{(1 - x^2)^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{dx}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{4}}}$,

$\frac{dx}{\sqrt{x}\,.\,\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{dx}{\sqrt{x}\,.\,\sqrt{1+x^2}}$, $\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{4}}}$, $\frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{4}}}$, $\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{4}}}$, ac *trinomiales* $\frac{dx\,.\,\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 \pm fx - g^2}}$, $\frac{dx\,.\,\sqrt{x}}{\sqrt{g^2 \pm fx - x^2}}$, $\frac{dx\,.\,\sqrt{x}}{\sqrt{fx - x^2 - g^2}}$, $\frac{dx}{\sqrt{x}\,.\,\sqrt{g^2 \pm fx - x^2}}$. Non apte, nec vere Vincentius Riccatus Iesuita hasce Maclaurini Formulas enumeravit in *Opusculorum* secundo II[i]. Voluminis (194). Praeteriit etenim Formulam $\frac{dx\,.\,\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$, simulque $\frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{4}}}$, neque in duobus primis *trinomialibus* termino fx geminatum signum $\pm$ adiunxit, tametsi ex Calculo Maclaurini τὸ $f = 2e = \frac{a^2-b^2}{a}$ constet esse positivum vel negativum, prouti Semiaxis transversus a maior, aut minor fuerit b Coniugato in Hyperbola *data* (195). Siluit quoque de Formulis aliis, quas Maclaurinus expressit occasione solertissimarum substitutionum, quemadmodum sunt, praeter $\frac{dx\sqrt{a^4 + k^2x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{dx\sqrt{a^2 + \left(\frac{p}{2a} - 1\right)x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (quum k excentricitatem Ellipseos significet ad Axem minorem $2a$ relatae) elementum Arcus ad Ellipsin conicam pertinentis abscissis x super Axem Coniugatum a centro numeratis (196), eae, quas subiungo, $\frac{dx}{x\sqrt{x}\,.\,\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{dx\sqrt{x}\,.\,\sqrt{1+x^2}}{x^2}$ aut $\frac{dx\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{x}}$, $\frac{dx\,.\,\sqrt{x}}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ sive $\frac{dx}{x\sqrt{x}\,.\,\sqrt{1+x^2}}$, $\frac{dx}{x\sqrt{x}\,.\,\sqrt{x^2 \pm fx - g^2}}$, $\frac{dx}{x^2\sqrt{g^2 \pm fx^2 - x^4}}$, $\frac{dx}{x^2\sqrt{fx^2 - x^4 - g^2}}$, $\frac{dx}{\sqrt{g^2 \pm fx^2 - x^4}}$ vel $\frac{dx}{\sqrt{g'^2 - x^2}\,.\,\sqrt{f'^2 + x^2}}$,

$\frac{dx \cdot x^2}{\sqrt{g^2 \pm fx^2 - x^4}}$, scilicet, $\frac{dx \cdot x^2}{\sqrt{g'^2 - x^2} \cdot \sqrt{f'^2 + x^2}}$, ac tandem

$\frac{dx \cdot x^{\frac{rn}{4} - 1}}{\sqrt{g + fx^n}}$, in qua r sit quilibet ex imparibus numeris (197). Harum formularum nonnullae eximii adeo usus sunt, ut ab ipso Maclaurino exhibeantur ad Problemata resolvenda Traiectoriarum, Temporis descensus gravium, Curvae Elasticae, Paracentricae, aliaque in eius *Tractatu* Lectorum oculis necessario obversanda (198). Quanta vero facilitate universae istae Formulae dimanent a doctrina Pascalii nemo est, qui non videat. De binis prioribus iam diximus satis in calce §^{i}. 34^{ti}. quomodo integrentur per arcum aequilaterae Hyperbolae. Tres primae e quatuor Formulis *trinomialibus* integrationem pariter receperunt in §§^{is}. 30mo. 32do. 33^{io}. ac 34to. aut per arcum unius Ellipseos, aut per arcum unius *scalenae* Hyperbolae, qui arcus postremus satisfacit etiam integrationi τῦ

$\frac{dx \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{g^2 \pm fx - x^2}}$, proptereaquod, facto $x = \frac{g^2}{z}$, pendeat $\int \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{g^2 \pm fx - x^2}}$ praeter Lineam rectam ab Integrali alterius formae praecognitae $\int \frac{dz \cdot \sqrt{z}}{\sqrt{z^2 \pm fz - g^2}}$. Sed etiam sine ista substitutione idem consequi possumus ad Theoriae in §°. 33^{io}. expositae supplementum. Formula enim elementi arcus Ellipseos quum sit ex §°. 31°. per doctrinam Pascalii $\frac{dz \sqrt{az}}{2\sqrt{(qa + a)z - zz - qaa}}$, ac per §^{um}. 24^{tum}. ut illud in Hyperbolicum convertatur ad secundum Axem relatum, fieri debeat $a = a\sqrt{-1}$, et $q = -q$, evadet $\frac{dz \sqrt{az\sqrt{-1}}}{2\sqrt{(1 - q)az\sqrt{-1} - zz - qaa}}$, nimirum, supposito $z\sqrt{-1} = x$ erit $\frac{dx \sqrt{ax}}{2\sqrt{-1}\sqrt{(1 - q)ax + x^2 - qaa}} =$ $\frac{dx \sqrt{ax}}{2\sqrt{(qa - a)x - xx + qaa}}$. Est ergo $\int \frac{dx \sqrt{ax}}{2\sqrt{qaa + (qa - a)x - xx}}$

(sive

(sive universalius $\int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{gg \pm fx - xx}}$ propter $q >$ aut < 1) ab arcu Hyperbolae dependens ex derivatis directe a Pascalio. Cui postremae expressioni si methodus Maclaurini adplicetur, emergit $\int \frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{xx + (qa - a)x - qaa}}$, videlicet, arcus Hyperbolae ad secundum Axem relatae; quod erat adhuc ex Pascalio desiderandum (199). Quinimmo in hac Formula clarius elucet analogia cum expressione arcus Elliptici. Ut enim dictum in §°. 28vo. non modo unus Semiaxium (nimirum primus) in Formula $\int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{xx \pm fx - gg}}$ est $= g$, verum etiam alter (nimirum secundus, ad quem heic refertur Hyperbola) a resolutione consequitur Aequationis $x^2 \pm fx - gg = 0$, videlicet est $= \mp \frac{f}{2} + \sqrt{gg + \frac{f^2}{4}}$; quod per §^{um}. 33^{ium}. non accidit in Hyperbola ad primum Axem relata. Integralia praeterea Formularum *binomialium* $\frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{1+x^2}}$ obtinentur praesidio arcus Lemniscatae, ideoque dimanant a Theoremate Pascalii veluti ostendit §^{us}. 40^{mus}., nimirum a Linea recta et Arcubus simul Hyperbolae aequilaterae, Ellipseosque. Reapse τὸ $\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{1-x^2}}$ idem est cum $\int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}$, suppositis $a = 1$, ac $z^2 = x$. Aliud autem Integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{1+x^2}}$ eodem redit ac $\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{z}.\sqrt{1-z^2}}$ per ingeniosam quidem, sed admodum laboriosam substitutionem τοῦ $z = \frac{2x}{1+x^2}$ (200). Mirari tamen non desinam quod elapso quinto ferme lustro post rectificationem Lemniscatae a Fagnano typis vulgatam in *Diario* Veneto, etiam penes longinquos Britannos celebratissimo, ne mentio quidem hic loci, ubi de eâdem agit re, a Maclaurino facta fuerit Italici inventi (201). Quod inventum et ad facilem integrationem consequendam ducebat alterius

rius Formulae $\frac{dx}{\sqrt{g'^2 - x^2} \cdot \sqrt{f'^2 + x^2}}$, utpote quae ad instar methodi in §°. 40mo. adhibitae resolvatur in $\frac{dx\sqrt{f'^2 + x^2}}{f'^2\sqrt{g'^2 - x^2}} -$

$\frac{dx \cdot x^2}{f'^2\sqrt{f'^2 + x^2} \cdot \sqrt{g'^2 - x^2}}$. Igitur, quum $\frac{1}{f'^2}\int\frac{dx\sqrt{f'^2 + x^2}}{\sqrt{g'^2 - x^2}}$ sit multiplum, aut submultiplum arcus Ellipseos datae per §^{um}. 36^{tum}. ex Pascalii doctrina, difficultas omnis manet in investigatione τῦ

$\frac{1}{f'^2}\int\frac{dx \cdot x^2}{\sqrt{g^2 \pm fx^2 - x^4}}$, videlicet, facto $x^2 = z$, τῦ

$\frac{1}{2f'^2}\int\frac{dz \cdot \sqrt{z}}{\sqrt{g^2 \pm fz - z^2}}$, quod Integrale ex praemissis habetur ope arcus *scalenae* Hyperbolae et Lineae rectae; adeo ut proposita summa pendeat a rectificatione simul Ellipseos atque Hyperbolae. Non modo itaque duce Pascalio in comperto est $\int\frac{dx}{\sqrt{g^2 \pm fx^2 - x^4}}$, verum etiam aliud

$\int\frac{dx \cdot x^2}{\sqrt{g^2 \pm fx^2 - x^4}}$, quod nec mente conceptum, neque adhuc erat desideratum. Pari facilitate obtinetur $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{g^2 \pm fx^2 - x^4}}$, propiereaquod, dum $x^2 = \frac{g^2}{z}$, istud Integrale vertatur in τὸ $-\frac{1}{2g^2}\int\frac{dz \cdot \sqrt{z}}{\sqrt{z^2 \pm fz - g^2}}$ ab arcu *scalenae* Hyperbolae ex praemissis dependens. Non dissimiliter, et eâdem adhibita substitutione, abit $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{fx^2 - x^4 - g^2}}$ in

$-\frac{1}{2g^2}\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz - z^2 - g^2}}$, nimirum, in Integrale ab arcu Elliptico suppeditatum. Elegantiam vero perquammaximam sub oculos ponit consideratio Integralis $\int\frac{dx}{x\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^2 \pm fx - g^2}}$, necnon Integralis alterius *trino-*

mialis

mialis $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,.\sqrt{g^2 \pm fx - x^2}}$. Primum etenim, post factam hypothesin $x = \frac{g^2}{z}$, statim convertitur in $-\frac{1}{g^2}\int \frac{dz\,.\sqrt{z}}{\sqrt{g^2 \pm fz - z^2}}$ iam superius contemplatum (202): secundum autem consequitur ab illa ipsa Formula $\int \frac{dx}{\sqrt{g^2 - x^2}\,.\sqrt{f^2 + x^2}}$, quam paullo ante summavi repetens facillimam methodum in §°. 40mo. explicatam. Revera, si fiat $x^2 = z$, postremum Integrale evadit $\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}\,.\sqrt{g^2 f^2 + (g^2 - f^2)z - z^2}}$, quod idcirco a Linea recta, atque arcubus Ellipseos, et *scalenae* Hyperbolae dependebit. Exinde fluit integrationis Formulae simplicioris $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,.\sqrt{1 - x^2}}$ ad Lemniscatam pertinentis vera ratio, propter quam non *scalena*, sed aequilatera Hyperbola opus sit ad istam integrandam, quemadmodum vidimus: deficiente etenim secundo termino in Denominatoris *trinomio* prostant etiam in §°. 34to. singularis huiusce casus exempla nonnulla. Prae ceteris expressionibus memoratu digna est $\frac{dx\,.\sqrt{x}}{\sqrt{1 + x^2}}$, utpote quae summetur praesidio Lineae rectae et arcus Hyperbolae aequilaterae, dum ex adverso prolixioris et improbae foret operae hoc integrale *purum* atque arcu carens Ellipseos derivare a Formula universali $\int \frac{dx\,.\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 \pm fx + b^2}}$, cuius mentio occurrit in eodem §°. 34to., in qua fieret $b = 1$ et f evanesceret (203). Illud autem ita tractandum censeo. Est $\int \frac{dx\,.\sqrt{x}}{\sqrt{1 + x^2}}$ idem ac $\int \frac{dx(1 + x^2) + dx(x^2 - 1)}{2x\sqrt{x}\,.\sqrt{1 + x^2}}$, nimirum $= \frac{1}{2}\int \frac{dx\,.\sqrt{1 + x^2}}{x\sqrt{x}} +$ $\frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx - dx}{x\sqrt{x}\,.\sqrt{1 + x^2}}$, cuius secunda pars integratur algebraice, prouti dictum de Formula simili in calce §^{i}. 34^{ti}., prior vero, quae ex illis est a Maclaurino traditis, integratur ope arcus Hyperbolae aequilaterae in

modum facillimi algorithmi sequentis. In expressione $\frac{dx\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{x}}$ substituatur $z = \frac{x^2+1}{2x}$, et erit $\int\frac{dx\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{x}} = \sqrt{2}\int\frac{dz.\sqrt{z}}{\sqrt{z^2-1}}$; ideoque $\frac{1}{2}\int\frac{dx\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{z^2-1}}$, videlicet, ex §°. 34to. toties citato, par submultiplo arcus aequilaterae Hyperbolae. Non solum ergo integrationem recepit $\int\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}}$, verum etiam $\int\frac{dx\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{x}}$ coronidum ad instar doctrinae Pascalii, quod postremum Integrale derivant alii (204) singulariter ab Hyperbola aequilatera inter asymptotas. Reliqua Maclauriniana sunt admodum faciliora. Namque ab eodem Integrali $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{z^2-1}}$, facto $x = \frac{1}{z}$, fluit $-\int\frac{dx}{x\sqrt{x}.\sqrt{1-x^2}}$, quod idcirco arcum Hyperbolae aequilaterae designabit. Accedit $\int\frac{dx}{x\sqrt{x}.\sqrt{1+x^2}}$, quod, quum nihil aliud sit praeter differentiam inter Integrale Algebraicum vel Lineam rectam superius enunciatam $\int\frac{x^2\,dx - dx}{x\sqrt{x}.\sqrt{1+x^2}}$, et $\int\frac{dx.\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}}$ a Linea recta et arcu Hyperbolae aequilaterae pendens ex nuper demonstratis, integrationem suam consequetur. Alia denique sic obtinentur. A $\int\frac{dz.\sqrt{z}}{\sqrt{z^2-1}}$, supposito $z = \sqrt{1+x^2}$, oritur $\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}$. Praeterea in $\int\frac{dz.\sqrt{z}}{\sqrt{1-z^2}}$ facto $z = \sqrt{1-x^2}$ enascitur $-\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}$. Et a $\int\frac{dz.\sqrt{z}}{\sqrt{1+z^2}}$ post hypothesin $z = \sqrt{x^2-1}$, profluit τὸ $\int\frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{1}{4}}}$. Haec igitur Integralia a rectificatione Hy-

perbolae aequilaterae dependebunt. Consimiliter a $\int \frac{dz}{\sqrt{z}.\sqrt{z^2-1}}$ eodem ordine derivatur, dum fuerit $z = \sqrt{1+x^2}$, $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{4}}}$; a $\int \frac{dz}{\sqrt{z}.\sqrt{1-z^2}}$, dum fiat $z = \sqrt{1-x^2}$, $-\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{4}}}$; atque a $\int \frac{dz}{\sqrt{z}.\sqrt{1+z^2}}$, subrogato pro z *binomio* $\sqrt{x^2-1}$, $\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{4}}}$; adeo ut secundum, ac tertium habeantur ex praemissis a rectificatione simul Hyperbolae aequilaterae et Ellipseos, primum vero a rectificatione Curvarum earundem, quum $\int \frac{dz}{\sqrt{z}.\sqrt{z^2-1}}$ idem sit ac $-\int \frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{1-x^2}}$ statim atque vice τῦ z substituatur $\frac{1}{x}$. Itaque Integrale huius formae $\int \frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{x^2-1}}$, etsi a Maclaurino praeteritum, rectificationem pariter significabit Lemniscatae Bernoulliorum (205). Quinimmo innumeras alias Formulas invenire fas esset aliis substitutionibus in subsidium vocatis, veluti de $\int \frac{-2\sqrt{2}.dx\sqrt{x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, aut potius $-2\sqrt{2}\int \frac{dx.\sqrt{x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ cuique constat, dum in $\int \frac{dz.\sqrt{z}}{\sqrt{1-z^2}}$ fiat $z = \frac{2x}{1+x^2}$ etc. etc. ad hoc ut prima expressio Analytica evidentissime a Linea recta et arcu aequilaterae Hyperbolae diducatur. Pulcherrimum exinde sequitur Theorema a Maclaurino proditum

τῦ $\int \frac{dx.x^{\frac{rn}{4}-1}}{\sqrt{g \pm fx^n}}$, sive, posito $x^n = z^2$, $\int \frac{2}{n}.\frac{z^{\frac{r}{2}-1}dz}{\sqrt{g \pm fz^2}}$, vel

$\frac{2}{n}\int\frac{z^{\frac{r}{2}-1}.dz}{\sqrt{g\pm fz^2}}$, aut $\frac{2}{n\sqrt{f}}\int\frac{z^{\frac{r}{2}-1}.dz}{\sqrt{\frac{g}{f}\pm z^2}}$, sive, dum fuerit

$\frac{g}{f}=1$, $\frac{2}{n\sqrt{f}}\int\frac{z^{\frac{r}{2}-1}.dz}{\sqrt{1\pm z^2}}$, pendentis ab arcu Hyperbolae aequilaterae quando r numerus sit ex Serie imparium 3, 7, 11, 15, 19, 23 etc., et ab arcu simul Hyperbolae aequilaterae atque Ellipseos quando r sit ex reliqua imparium Serie 1, 5, 9, 13, 17, 21 etc., quo Theoremate vix utilius, et elegantius in Analysi infinitorum occurrit. Integratio etenim Formularum *binomialium* per Elementa Calculi *summatorii* reducitur tandem, praeter expressiones algebraicas aut rectas Lineas, in istis casibus ad formas $\int\frac{dz.\sqrt{z}}{\sqrt{1\pm z^2}}$, $\int\frac{dz}{\sqrt{z}.\sqrt{1\pm z^2}}$ etc.; et quando Ellipsis adsit, ea ipsamet semper est a Fagnano adhibita in rectificatione Lemniscatae, videlicet illa, cuius descriptionem facillimam atque ad praxin elegantissime accommodatam alio loco explicavi (206).

43. Ita res erat de hisce Integralibus in Magna Britannia quum Alembertus, prima adhuc iuventute florens (207), argumentum idem aggressus fuit; nec modo theoriam pene omnem complevit, verum etiam a novis fundamentis erexit. Nondum autem fuerat ex Anglico in Gallicum sermonem versus *Tractatus* Maclaurini (208) ea tempestate, qua acutissimus ille Geometra in *Commentariis Berolinensis Academiae* relatis ad annos M.DCC.XLVI[tum], ac M.DCC.XLVIII[vum], (209) elaboratas protulit lucubrationes in hanc Integralis Calculi partem amplificandam. Relicta Synthesi Maclaurini, omnia superstruuntur ab eo elementis arcuum Ellipseos atque Hyperbolae Apollonii (210) vel ad primum vel ad secundum Axem ordinatorum; quae arcuum elementa et ipse novit Maclaurinus (211), sed nescio quo fato posthabuit. Quanta vero animi voluptate Alembertus idem nuncium accepisset cuncta derivari potuisse ab unico Pascalii conterranei sui et perantiquo Theoremate! Quomodo hoc fiat, Bougainvillium (212) atque Cousinum (213) Alemberti inventa repetentes, et Alembertum ipsum tum in *Commentariis* iisdem, tum in suis *Opusculis Mathematicis* praesertim sequendo,

do, breviter explicabo. Quatuor formulis *trinomialibus* Maclaurini, de quibus sermo in §°. praecedente, Alembertus addidit primum

$\frac{dx}{\sqrt{x}\,.\sqrt{x^2 \pm fx - g^2}}$ et $\frac{dx}{\sqrt{x}\,.\sqrt{fx - x^2 - g^2}}$. Quo ad priorem expressionem Differentialem eius integratio vix inventionis gloriam meretur, quum nihil aliud sit quam repetitio methodi Maclaurinianae, videlicet, substitutionis facillimae τῦ $x = \frac{g^2}{z}$ ad hoc ut propositum Integrale

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,.\sqrt{x^2 \pm fx - g^2}}$ vertatur in aliud $-\int \frac{dz}{\sqrt{z}\,.\sqrt{g^2 \pm fz - z^2}}$ a Maclaurino resolutum ope arcuum Hyperbolae, Ellipseos, ac Lineae rectae, ideoque per ea, quae supra diximus, adnumerandum ceteris iam deductis a Pascalii Theoremate (214). Mirari itaque potius debemus suae methodi compotem Scriptorem Anglum vel nimis festinantem vel non omnia deliberato animo colligentem illud facillimum neglexisse (215). Alterum vero Integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,.\sqrt{fx - x^2 - g^2}}$, una cum

$\frac{x^{\pm \frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2 \pm fx + g^2}}$ ad complendam horumce *trinomialium* seriem quum nullo alio egeant artificio praeter Algebram Cartesianam ut formam induant quorundam ex Integralibus praecognitis, liquet aeque ac praecognita fructibus doctrinae Pascalii esse adscribenda (216). Nonnulla tamen commentatione digna sunt in hac Alemberti theorice. Quanta equidem simplicitate dimanant a Formulis Alemberti Integralia Differentialium $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - g^2}}$

et $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{g^2 - x^2}}$ ab arcu Hyperbolae aequilaterae dependentia (217), tantis e contra ac fastidiosissimis Calculi molestiis obruta et plena laboris est, Ellipsi etiam eliminata, derivatio Integralis $\int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + g^2}}$ (218), tametsi istud aeque ac duo priora ab arcu aequilaterae Hyperbolae consequatur, quemadmodum expertus sum in §°. praecedente. Quod nec Alembertus

Alembertus ipse deinceps sensisse videtur, utpote qui in *Opusculorum* Volumine I°. edito labente anno M.DCC.LXI°. (219), nimirum tribus lustris emensis post eius primas in Commentariis Berolinensibus meditationes, suam denuo methodum adhibuerit arcum Hyperbolae in duas Formulas dispescentem ad idem Integrale quaerendum $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz+bb}}$, sive universalius $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{Azz+B}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz+\frac{B}{A}}}$ (220). Agens Alembertus de $\int \frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{a \pm xx}}$ nec Fagnanum (221) nec Maclaurinum (222) memorat; de Lemniscata silet; Hyperbolam nominat atque Ellipsin, veruntamen neque admonet priorem esse aequilateram, nec posteriorem eius esse speciei, quae Axes habeat in proportione τῶ $\sqrt{2}:1$ (223) semperque comitetur, pronti ostendit Vincentius Riccatus (224), universa haec Integralia Ellipseos simul et Hyperbolae arcus complectentia dum ista vertatur in aequilateram (225). Fagnani pariter oblitus in *rectificatione* primae Parabolae cubicalis, sive in determinando hoc Integrali $\int \frac{dz\sqrt{zz+1}}{\sqrt{z}}$, neque illam tractat prouti iam penes Italos resolutam (226), neque in ea resolvenda dum scindit Integrale in duas partes, videlicet $\int \frac{dz.z\sqrt{z}}{\sqrt{zz+1}} +$ $\int \frac{dz}{\sqrt{z}.\sqrt{zz+1}}$, has dicit ab universali Maclaurini Formula comprehensas, cuius mentio facta in calce §[i]. praecedentis. Huic vero Formulae a Maclaurino datae ferme omnia referuntur Theoremata Differentialium

$$\frac{x^{\frac{1}{2} \pm 2f} dx}{\sqrt{a \pm xx}},\ \frac{z^{\frac{1}{2} \pm 2f} dz}{\sqrt{B+Azz}},\ \frac{z^{-\frac{1}{2} \pm 2f}}{\sqrt{bb+zz}},\ z^{\frac{1}{2} \pm 2f} dz (B+Azz)^{+\frac{p}{2}}$$

etc., quae integrationem recipiunt ab arcubus Sectionum Coni, tametsi, veluti nova fuerint, ab Alemberto prolata. Egregium est inter alia illud Integrale

$\int$

$\int \frac{x^{-\frac{1}{2} \pm 2f} dx}{\sqrt{a \pm xx}}$, quod Alembertus obtineri semper edocet ope Arcus Hyperbolae (et Maclaurinus addiderat *aequilaterae*), ac quandoque simul cum Arcu Ellipseos (quos postremos casus Maclaurinus ipse apte nitideque distinxerat) (227). Adserit Alembertus idem (228) universaliter duo Differentialia $\frac{dx . \sqrt{x}}{\sqrt{a + bx + cxx}}$ et $\frac{dx}{\sqrt{x} . \sqrt{a + bx + cxx}}$ ab eàdem semper Ellipsi et Hyperbola integrationem acquirere, cuius praestantissimi Theorematis indubium specimen debemus quidem Iacobi simul Bernoullii et Fagnani laboribus, quippe qui ante omnes in casu τῦ $b = 0$ et a negativi repererint $\int \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{a + cxx}}$ atque $\int \frac{dx}{\sqrt{x} . \sqrt{a + cxx}}$ ita esse comparata, ut primum pendeat ab Arcu Hyperbolae aequilaterae, alterum ab arcu Ellipseos et eiusdem Hyperbolae (229), non secus ac ope unius Hyperbolae scalenae et Ellipseos satisfit duobus Integralibus $\int \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{fx - bb - xx}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x} . \sqrt{fx - bb - xx}}$ in singulari exemplo Alemberti (230). Quanam igitur ratione Bougainvillius iunior, fidus Alemberti interpres et ipsius ἀνεκδότων potitus, quae deinde publici iuris facta sunt in praelaudatis *Opusculis* (231), pulcherrimum illud Theorema adtulerit pro unico casu Integralium $\int \frac{dz \sqrt{z}}{\sqrt{zz \pm fz + bb}}$, $\int \frac{dz}{\sqrt{z} . \sqrt{zz \pm fz + bb}}$, in quibus radices Trinomii $zz \pm fz + bb$ imaginariae fuerint (232), reliquis omnibus silentio praeteritis, ignorare profiteor. Quod autem in Alemberto desideraverim sane illud est, ut suum Theorema alterum ingeniosissimum demonstrasset, quo statuit τὸ $\int \frac{dz \sqrt{z}}{\sqrt{zz - fz + ff}}$ dependere ab unico Ellipseos arcu (233). Dum enim et canones consulam ab eo datos, et exempla ab eo adlata, hoc equidem difficillimum video. Si Bougainvillium interrogem, cetera omnia transtulit *de verbo ad verbum*, hoc autem praetermisit Theore-

ma

ma (234). Demonstrationem quaerens istud potius in falsum abire reperio. Et re quidem vera ad integrandum Differentiale $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz \pm fz + bb}}$ Alembertus illud universaliter trifariam divisit (235) ea in hypothesi, qua Trinomii radices fuerint *imaginariae*, veluti in singulari exemplo Theorematis. Posito autem $b = f$, atque signo τῦ f negativo, neutra partium evanescit, nec tres arcus Hyperbolici ita se invicem destruunt, ut unicus restet arcus Ellipseos. Enimvero $AA = bb - \frac{ff}{4} = \frac{3ff}{4}$, et tres partes, in quas dividitur Differentiale, sunt $\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{2}\,.\,\sqrt{yy + fy - \frac{3ff}{4}}}$,

$$\frac{-\frac{3ff}{4}\,.\,dy}{\sqrt{2}\,.\,y\sqrt{y}\,.\,\sqrt{yy + fy - \frac{3ff}{4}}},\ \text{atque}\ \frac{+fdy}{\sqrt{2}\,.\,\sqrt{y}\,.\,\sqrt{yy + fy - \frac{3ff}{4}}},$$

ubi $y = z - \frac{f}{2} + \sqrt{zz - fz + ff}$. Pars igitur prima integrata (communi nunc neglecto $\sqrt{2}$ factore Denominatoris, qui ratiocinium non infirmat) est arcus Hyperbolae positivus, cuius reales Semiaxes secundus, ac primus sint $f\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\frac{3f}{2}$ ex praemissis in §° 33^{io}.; secunda praeter Lineam rectam negativam est idem arcus positivus eiusdem Hyperbolae (236); tertia demum, in qua difficultas tota consistit, facto $y = \frac{\frac{3ff}{4}}{u}$ vertitur in alteram $\frac{-fdu}{\sqrt{u}\,.\,\sqrt{\frac{3ff}{4} + fu - uu}}$, quae integrata iuxta praecepta Alemberti (237) reducitur praeter Rectam negativam ad duos arcus Sectionum Conicarum, unum scilicet positivum ab Hyperbola dependentem

$$\frac{fdu\sqrt{u}}{m\sqrt{\frac{3ff}{4} + fu - uu}} = \frac{fdu\sqrt{u}}{\frac{f}{2}\sqrt{\frac{3ff}{4} + fu - uu}}\ (238) =$$

$\frac{2 \cdot du\sqrt{u}}{\sqrt{\frac{3ff}{4}+fu-uu}} = \frac{2dy\sqrt{y}}{\sqrt{yy+fy-\frac{3ff}{4}}}$ post factum $\frac{\frac{3ff}{4}}{u}=y$ uti supra (239), alium negativum Ellipseos $\frac{-fdu\sqrt{\frac{1}{2}f+u}}{\frac{1}{2}f\sqrt{u}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}f-u}}$, nempe

submultiplum $\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}=2 \text{ multiplo}\right)$ arcus $\int\frac{-du\sqrt{\frac{1}{2}f+u}}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}f-u}}$, aut,

supposito $\frac{f}{2}+u=x$, arcum Ellipticum negativum, ad quem ducit expressio differentialis $\frac{-dx\sqrt{x}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}fx-xx-ff}}$. Horum arcuum postremus spectat etenim ad Ellipsin Conicam, cuius Semiaxes sint $f, 2f$ ex praecedente §°. 28vo. (240). Omnibus hisce collectis nemo non videt τὸ $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz-fz+ff}}$ peraequare Differentiam, quae intercedit inter Quadruplum submultipli $\frac{1}{\sqrt{2}}$ arcus Hyperbolici supradicti

$\int\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{yy+fy-\frac{3ff}{4}}}$ sive Quadruplum submultipli

$\frac{2}{\sqrt{3f}}\int\frac{dy\sqrt{\frac{3}{2}fy}}{2\sqrt{yy+fy-\frac{3ff}{4}}}$ arcus veri ac directi Hyperbolae eiusdem ad primum Axem relatae (241) et Summam conflatam ex

$\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx\sqrt{x}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}fx-xx-ff}}$, videlicet, ex multiplo $\sqrt{2}$ arcus Elliptici

 animad-

animadverti $\int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{5}{2}fx - xx - ff}}$, aut potius ex submultiplo

$\frac{2}{\sqrt{f}} \int \frac{dx\sqrt{2fx}}{2\sqrt{\frac{5}{2}fx - xx - ff}}$ arcus veri ac directi Ellipseos et triplo

rectae Lineae vel Integrali Algebraico sic expresso

$\frac{3\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{yy + fy - \frac{3ff}{4}}\right)}{\sqrt{y}}$. Hac igitur calculorum molestia superata, evincitur tandem quod Alemberti vestigia premendo Integrale suum $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz - fz + ff}}$ non ab arcu solius Ellipseos, ut ipse aiebat, sed ab arcubus simul Ellipseos et Hyperbolae dependeat, nimirum sit

$$\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz - fz + ff}} = 4\left(\frac{2}{\sqrt{3f}} \int \frac{dy\sqrt{\frac{3}{2}fy}}{2\sqrt{yy + fy - \frac{3ff}{4}}}\right)$$

$$- \frac{2}{\sqrt{f}} \int \frac{dx\sqrt{2fx}}{2\sqrt{\frac{5}{2}fx - xx - ff}} - 3\sqrt{\frac{2}{y}} \cdot \sqrt{yy + fy - \frac{3ff}{4}}$$; cuius

expressionis variabiles y, x ita sunt comparatae, ut $y = z - \frac{f}{2} + \sqrt{zz - fz + ff}$ veluti innuimus paullo antea, et $x = \frac{f}{2}\left(\frac{z + f + \sqrt{zz - fz + ff}}{z - \frac{f}{2} + \sqrt{zz - fz + ff}}\right)$ quemadmodum constat a substitutionum adhibitarum regressu (242). Neque Theorema istud, quod falsitatis arguo, ab exemplis arbitror Alemberti meliorem nactum iri fortunam. Illud etenim, quod legitur in *Berolinensibus Commentariis* (243), est $\int \frac{du\sqrt{uu + 2p'au + aa}}{u\sqrt{u}}$, aliud etiam simplicius in *Opusculis* (244)

$\int du$

$\int du \sqrt{uu \pm fu + bb}$ ad rem nostram non faciant, tametsi primum unico Hyperbolae arcu certe integrari demonstratu facile sit. Eorum autem postremum, si verum unquam fuerit, ab Alemberto mendose resolveretur uti transcribo fideliter (245), $du \sqrt{uu \pm fu + bb} = \frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{uu \pm fu + bb}} \pm \frac{fdu}{u \sqrt{uu \pm fu + bb}} + \frac{bbdu}{\sqrt{u} . \sqrt{uu \pm fu + bb}}$, quum e contra sit $= \frac{du . uu}{\sqrt{uu \pm fu + bb}} \pm \frac{du . fu}{\sqrt{uu \pm fu + bb}} + \frac{du . bb}{. \sqrt{uu \pm fu + bb}}$. Veruntamen aut Alembertus aut Typotheta erravit, propterea quod non $\int du \sqrt{uu \pm fu + bb}$, sed $\int \frac{du \sqrt{uu \pm fu + bb}}{u \sqrt{u}}$ scribi debuisset, idem nempe antiquioris formae Integrale ab eo traditum $\int \frac{du \sqrt{uu + 2p'au + aa}}{u \sqrt{u}}$, in quo τὸ $p' = \frac{q - 1}{q + 1}$ positivum aut negativum esse potest ob $q >$ et aliquando < 1. Qua forma correcta (246), dum f evanuerit iam docuit Maclaurinus ante Alembertum fore $\int \frac{du \sqrt{uu + bb}}{u \sqrt{u}}$ Integrale ab arcu solius Hyperbolae aequilaterae dependens, ut liquet ex §°. praecedente; dum autem adsit f, sine tanta calculi prolixitate, quanta in locis citatis usus fuit Alembertus (247), eadem Maclaurini methodus substitutionis $z = \frac{uu + bb}{2u}$ nos ducit ad Aequationem $\int \frac{du \sqrt{uu \pm fu + bb}}{u \sqrt{u}} = \int \frac{dz \sqrt{2z \pm f}}{\sqrt{z^2 - b^2}}$, quae posterior expressio *primigenia* per ea, quae sunt in calce §ⁱ. 34ᵗⁱ. a Pascalio deprompta, denotat arcum *scalenae* Hyperbolae, et facto $f = 0$ in antecedentem convertitur. Si meum aperire sensum nunc liceat, deceptum fuisse indico Alembertum exeoquod in resolutionis casu τῷ Differentialis $\frac{dz \sqrt{z}}{\sqrt{zz - fz + bb}}$

 trifa-

trifariam ita divisi $\frac{dt\sqrt{t}}{\sqrt{2}.\sqrt{tt-AA+ft}}-\frac{AAdt}{\sqrt{2}.t\sqrt{t}.\sqrt{tt-AA+ft}}$ $-\frac{fdt}{\sqrt{2t}.\sqrt{tt-AA+ft}}$ tertium terminum supposuerit negativo signo adfectum (248), quum e contra, rite inito calculo, esse debeat $+\frac{fdt}{\sqrt{2t}.\sqrt{tt-AA+ft}}$. Fructus tamen aliquis ab hac mea investigatione consequitur, praemiumque exantlati laboris. Revera non $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz-fz+ff}}$ ut Alembertus adseruerat, sed $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz+fz+ff}}$ ab unius Ellipseos *rectificatione* obtineri mihi contigit reperire. Namque, iisdem positis prouti superius, erit $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz+fz+ff}}=\int\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{2}.\sqrt{yy-fy-\frac{3ff}{4}}}$

$$-\int\frac{\frac{3ff}{4}.dy}{\sqrt{2}.y\sqrt{y}.\sqrt{yy-fy-\frac{3ff}{4}}}-\int\frac{fdy}{\sqrt{2}.\sqrt{y}.\sqrt{yy-fy-\frac{3ff}{4}}},$$

quibus in formulis $y=z+\frac{f}{2}+\sqrt{zz+fz+ff}$. Prima ac secunda pars *membri comparationis* eundem significant arcum Hyperbolae *scalenae*, cuius Semiaxis secundus sit $f\sqrt{\frac{3}{4}}$, primus autem $\frac{f}{2}$, cum Linea recta negativa, et idcirco $\int\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{2}.\sqrt{yy-fy-\frac{3ff}{4}}}$

$$-\int\frac{\frac{3ff}{4}.dy}{\sqrt{2}.y\sqrt{y}.\sqrt{yy-fy-\frac{3ff}{4}}}=$$

2 (

$$2\left(\frac{2}{\sqrt{f}}\int\frac{dy\sqrt{\frac{f}{2}y}}{2\sqrt{yy-fy-\frac{3ff}{4}}}\right)-\sqrt{\frac{2}{y}}.\sqrt{yy-fy-\frac{3ff}{4}}.$$ Tertia denique pars $\int-\frac{fdy}{\sqrt{2}.\sqrt{y}.\sqrt{yy-fy-\frac{3ff}{4}}}=$

$$-2\left(\frac{2}{\sqrt{f}}\int\frac{dy\sqrt{\frac{f}{2}y}}{2\sqrt{yy-fy-\frac{3ff}{4}}}\right)+2\sqrt{\frac{2}{y}}.\sqrt{yy-fy-\frac{3ff}{4}}+$$

$\frac{2}{3\sqrt{f}}\int\frac{dx\sqrt{2fx}}{2\sqrt{\frac{7}{2}fx-xx-3ff}}$ per eandem Alemberti methodum, ad arcus veros directosque Conicarum tantummodo accommodatam. Cumulatis ergo partibus Hyperbolici arcus eliminantur, fitque $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz+fz+ff}}$

$$=\sqrt{\frac{2}{y}}.\sqrt{yy-fy-\frac{3ff}{4}}+\frac{2}{3\sqrt{f}}\int\frac{dx\sqrt{2fx}}{2\sqrt{\frac{7}{2}fx-xx-3ff}},$$ nimirum Quantitati algebraicae, aut Lineae rectae, simul cum arcu Ellipscos, cuius Semiaxes sint $2f$ maior, $f\sqrt{3}$ minor, atque $x=$

$$\frac{3f}{2}\left(\frac{z+f+\sqrt{zz+fz+ff}}{z+\frac{f}{2}+\sqrt{zz+fz+ff}}\right).$$ Oblata occasione memoratu dignum est Ellipses geminas, ad quas ducunt Integralia superius explicata $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz-fz+ff}}$ et $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz+fz+ff}}$, systemata Semiaxium (ideoque et Axium) huiusmodi habere, ut eorum unus communis sit. In priori enim Ellipsi Semiaxes valent $2f, f$ quemadmodum supra, et in posteriori $2f, f\sqrt{3}$. Sed in Hyperbolis elegantior emicat comparatio. Unus quip-

pe

pe earum Semiaxium est $\frac{f\sqrt{3}}{2}$ duabus communis; alter prioris est $\frac{3}{2}f$, posterioris $\frac{1}{2}f$; suntque tres isti $\frac{3}{2}f : \frac{f\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2}f \div$, scilicet, in continua geometrica proportione, cuius termini secundus ac tertius medietates peraequant diversorum Semiaxium minorum $f\sqrt{3}, f$ duarum Ellipsium. Hyperbolae ergo, de quibus sermonem instituo, gaudent communi Semiaxe secundo $\frac{f\sqrt{3}}{2}$, qui geometrice medius est inter primos $\frac{3}{2}f$, $\frac{1}{2}f$. Haec autem proprietas non solum singularia spectat Integralia $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz - fz + ff}}$, $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz + fz + ff}}$, veruntamen latius porrecta complectitur universalem geminorum Integralium formam $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz - fz + gg}}$, $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz + fz + gg}}$, et idcirco ex praemissis (249) formam quoque $\int \frac{dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{zz - fz + gg}}$, $\int \frac{dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{zz + fz + gg}}$; quod est Theorema non equidem aspernandum. Enimvero, si praecepta eadem ab Alemberto tradita sequamur, Hyperbolarum, ad quas illae Formulae ducunt, Semiaxes primi sunt $\frac{f}{2} + g$, $-\frac{f}{2} + g$, secundus autem communis $\sqrt{gg - \frac{ff}{4}}$; ac nemo non videt esse $g + \frac{f}{2} : \sqrt{gg - \frac{ff}{4}} : g - \frac{f}{2} \div$, dummodo $gg > \frac{ff}{4}$, nimirum Trinomium $zz \pm fz + gg$ factores habeat *imaginarios*, ut in realibus Quantitatibus immoremur. Dum autem $gg < \frac{ff}{4}$, et ideo Trinomium $zz \pm fz + gg$ factores habeat reales, ex Alemberto ipso deducitur (250) fore Semiaxem secundum communem duabus Hyperbolis $\sqrt{f\sqrt{\frac{ff}{4} - gg} - 2\left(\frac{ff}{4} - gg\right)}$, atque primos Semiaxes in casu $zz + fz$ esse

esse $2\sqrt{\frac{ff}{4}-gg}$, et in opposito $\tau\tilde{u}-f$: esse $\frac{f}{2}-\sqrt{\frac{ff}{4}-gg}$; quapropter emergit proportio $2\sqrt{\frac{ff}{4}-gg}:\sqrt{f\sqrt{\frac{ff}{4}-gg}-2\left(\frac{ff}{4}-gg\right)}:\frac{f}{2}-\sqrt{\frac{ff}{4}-gg}\div$ uti Elementa suadent (251). Longius tamen repetenda est admirandae affectionis huius origo, quippe enascitur ab expressione primitiva arcus Hyperbolici $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz\pm fz-gg}}$, in qua nullum aliud discrimen adsit praeter signum $\tau\tilde{u}\, f$. Ex iam dictis etenim in §°. 33^{io}. quo ad casum $+f$ Semiaxes Hyperbolae sunt g secundus, et $+\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}$ primus, dum quo ad alterum $-f$ Semiaxes secundus, ac primus sunt g, ac $-\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}$, qui simul animadversi suppeditant semper $\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}:g:-\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}\div$ continuam geometricam Proportionem, quam inconcussam Algebra tuetur etiam in limite $\tau\tilde{u}\pm f$, videlicet, quum $f=0$, et Formula vertatur in $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz-gg}}$. Ea namque in hypothesi fit proportio $g:g:g\div$, ac duo Hyperbolae in unicam abeunt, quae reapse ex §°. 34to. aequilatera est non secus ac in praesentia demonstro. Quod igitur Analysis fecit (vid. §^{um}. 28^{vum}.) in Formulae simplicis $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz-zz-gg}}$ resolutione, quae duos Ellipsium arcus repraesentat, quarum Semiaxis communis sit g, ceterique diversi in expressione biformi contineantur $\frac{f}{2}\pm\sqrt{\frac{ff}{4}-gg}$, atque proportionem efficiant $\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}-gg}:g:\frac{f}{2}-\sqrt{\frac{ff}{4}-gg}\div$,

tametsi

tametsi f signo unico positivo gaudere possit, Formulamque unicam possibilem suppeditare valeat, idipsum quoque efficere conatur ad religiose servandam Conicarum analogiam in expressione duplici integranda

$\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz \pm fz - gg}}$ praesidio arcus duarum Hyperbolarum communi Semiaxe secundo g praeditarum, et Semiaxes primos habentium comprehensos a Formula biformi $\pm \frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} + gg}$, ac in geometrica proportione cum g pariter iunctos. In gemina Ellipsi, ubi τὸ f positivum semper erat, hoc fecit duplicitatem expressionis in Radicali complectens $\frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{ff}{4} - gg}$; quae Formula idonea etiam est ad demonstrandam, vel potius confirmandam constructionis τῦ $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{-fz - zz - gg}}$ impossibilitatem, quum Semiaxes utrique $-\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} - gg}$, $-\frac{f}{2} - \sqrt{\frac{ff}{4} - gg}$ duarum Ellipsium negativi evaderent, positivo semper manente communi g, ideoque et Axes $-f + \sqrt{ff - 4gg}$, $-f - \sqrt{ff - 4gg}$, positivo manente altero $2g$; quod monstro simile esset, quia ex traditis in Geometria Ellipsis uno Axe positivo, altero negativo praedita aeque imaginaria est ac Circulus super diametrum positivam descriptus hac conditione, ut altera ad normam posita sit negativa. In gemina vero Hyperbola idem fecit Analysis ope duplicis signi $\pm f$, Formulamque biformem instituit $\pm \frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} + gg}$ reiecto gemino Radicalis signo, propterea quod Semiaxes negativi fierent, ideoque et Axes Hyperbolarum $f - \sqrt{ff + 4gg}$, $-f - \sqrt{ff + 4gg}$ dum communis alter Axis $2g$ positivus permaneret, Curvarumque impossibilitatem ostenderet. Sed et in hisce imaginariis casibus suorum iurium Algebra tenax tam in Ellipsibus, quam in Hyperbolis proportionem suam sartam tectam tuetur, scilicet $-\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} - gg} : g :$

$-\frac{f}{2}-\sqrt{\frac{ff}{4}-gg}\div$, atque $+\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}:g:+\frac{f}{2}$ $-\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}\div$, $-\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}:g:-\frac{f}{2}-\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}\div$, $\frac{f}{2}-\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}:g:-\frac{f}{2}-\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}\div$. Fundamentum speculationis analyticae, in qua nunc sumus, praesentissimum habetur si Formulam versare non pigeat Arcus Hyperbolae ad secundum Axem relatae. Formulam istam nescio quo iure ab Alemberto (252), et Leonardo Eulero (253) neglectam postmodum animadvertit Vincentius Riccatus (254), sed evolverunt et in usum traduxerunt praesertim Commentatores Minimi *Principiorum* Newtoni (255). Censuit Alembertus totius utilitatis et commodi expertem futuram considerationem analyticae expressionis arcus Hyperbolae ad secundum Axem relatae, utpote quae in idem recidat ac expressio altera eiusdem Curvae arcus dum primo Axi referatur (256). Quod quam verum sit in Ellipsi, eâdem Aequatione praedita si alterutri Axi suo comparetur, tam infirmari arbitror in Hyperbola, cuius Aequatio ad Axem secundum valde differt ab alia, quae primum Axem respiciat. Profecto Theorema Pascalii suppeditavit in §°. 31mo. Formulam unicam pro Ellipseos arcu

$$\int\frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{(qa+a)z-zz-qaa}}$$, sed e contra geminam, nempe

$$\int\frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{zz+(a-qa)z-qaa}}$$ in §°. 32do. ac 33^{io}., necnon

$$\int\frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{zz+(qa-a)z-qaa}}$$ in §°. 42do. pro arcu Hyperbolae, positis

in Ellipsi duobus Semiaxibus $a, a\sqrt{q}$, in Hyperbola primo Semiaxe a, secundo $a\sqrt{q}$, et rursum in eâdem Curva secundo Semiaxe a, ac vicissim primo $a\sqrt{q}$ ex praeostensis. Duae Hyperbolici arcus expressiones in eo solum discriminantur, quod Coëfficiens denominatoris *trinomialis* diverso gaudeat signo, quum in uno sit $a-qa$, in altero vero $-(a-qa)=qa-a$. Ab unica igitur signi illius mutatione, ceteris omnibus iisdem permanentibus, inversio ordinis Axium Hyperbolae oritur, Arcuumque alterna comparatio primo secundove Axi huius Conicae Curvae. Dum ergo

$a - qa = f$, $qaa = gg$, erit $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz+fz-gg}}$ arcus Hyperbolae ad primum Axem, cuius Semiaxis primus $\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} + gg}$, secundus g ex §°. 33^{io}., et vicissim $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz-fz-gg}}$ erit arcus alterius Hyperbolae ad secundum Axem, cuius Semiaxis primus g, secundus $\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} + gg}$ ex §°. 42do., nimirum arcus Hyperbolae *Coniugatae*. Hic autem arcus Hyperbolae *Coniugatae* per Curvarum Geometriam reducitur facile ad arcum Hyperbolarum *similium*, quarum una ea est superius contemplata, Semiaxem primum habens $-\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} + gg}$, secundum g, uti patet ex iam dicta proportione $-\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} + gg} : g : \frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} + gg} \div$. Et re quidem vera si compleatur Formula, ut lex *homogeneorum* servetur, est in Hyperbola ad primum Axem

$$\int \frac{dz \cdot \sqrt{-\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} + gg}} \cdot \sqrt{z}}{2\sqrt{zz - fz - gg}} = \text{arcui Curvae } s, \text{ et in Hyper-}$$

bola ad secundum Axem ex superius citato §°. 33^{io}.

$$\int \frac{dz \cdot \sqrt{\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} + gg}} \cdot \sqrt{z}}{2\sqrt{zz - fz - gg}} = \text{Arcui Curvae } s' =$$

$$\frac{g}{-\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} + gg}}$$ in arcum *similem* s'' praedictae prioris Hyperbolae *similis* ad secundum vel primum Axem relatae, videlicet $=$

$$\frac{\sqrt{-\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} + gg}} \cdot \sqrt{\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} + gg}}}{-\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} + gg}} \, s'' \text{ vel potius } =$$

$$\frac{\sqrt{\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}}}{\sqrt{-\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}}}\times\int\frac{dz\,.\sqrt{-\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}}\,.\sqrt{z}}{2\sqrt{zz-fz-gg}}=$$

$$\int\frac{dz\,.\sqrt{\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}}\,.\sqrt{z}}{2\sqrt{zz-fz-gg}}$$, quemadmodum supra. Eadem viceversa recurrunt supponendo $a-qa=-f$, ideoque $qa-a=f$, et $qaa=gg$. Tunc $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz-fz-gg}}$ par erit arcui Hyperbolae ad primum Axem, habentis Semiaxem primum $-\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}$, secundum g; atque $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz+fz-gg}}$ peraequabit arcum Hyperbolae *Coniugatae* ad secundum Axem, habentis $-\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}$ pro Semiaxe secundo, ac g pro primo. Et *similibus* pariter Hyperbolis in subsidium vocatis norunt omnes $\int\frac{dz\,.\sqrt{-\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}}\,.\sqrt{z}}{2\sqrt{zz+fz-gg}}=$

$$\frac{\sqrt{\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}}\,.\sqrt{-\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}}}{\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}}\times$$

$$\int\frac{dz\,.\sqrt{\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}}\,.\sqrt{z}}{2\sqrt{zz+fz-gg}}$$, scilicet, $=$

$$\int\frac{dz\,.\sqrt{-\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}+gg}}\,.\sqrt{z}}{2\sqrt{zz+fz-gg}}$$ eâdem superiori methodo reno-

 vata

vata. Maximum autem suscepti huiusce laboris pretium in eo situm est quod illam Formularum Ellipseos et Hyperbolae in hac Integralium theorice analogiam, quam hactenus Mathematici aut non viderunt, aut non vidisse visi sunt, restituere facile possim. Aliqua de argumento ipso obiter delibavi in §°. 42do., pluraque ex paullo antea dictis consequuntur; sed nunc plenius tractandam amoenissimam ipsam rem mei muneris esse iudico. Arcum Ellipseos comprehensum a Formula universali

$\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz - zz - gg}}$ inveniri aeque posse aut Curvam eandem referendo ad primum et maiorem Axem, aut potius ad secundum et minorem primus quod sciam docui in §°. 31mo. Quin etiam si directam consulas derivationem Arcus illius a Pascalii theoria, Axis, cui referatur Ellipsis, et in quo abscissae computentur, *coniugatus* semper est quo ad alterum Axem, super quem abscissae numerantur in communi Analystarum doctrina a Calculo Integrali deducta (257). Ut hoc in Hyperbola quoque, et quanam ratione idgenus *harmoniam* expertus sim, ad Conicarum intimum foedus eo magis illustrandum breviter explicabo, diversâque etiam via, qua idipsum confeci in Ellipsi. Expressio itaque $\int \frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{zz + (a - qa)z - qaa}}$, aut universalius $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz + fz - gg}}$ (in qua utrum f vel positivi, vel negativi valoris fuerit, nimirum aut $a - qa$, aut $qa - a$, nihil interest) duplici modo per arcum Hyperbolae construi potest, non secus atque altera $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz - zz - gg}}$, cuius constructio ab Ellipseos arcu dimanat. Siquidem in potestate Geometrarum est Formulam illam construere aut Hyperbolam quaerendo ad Axem primum relatam, aut alteram Hyperbolam comparatam Axi secundo vel *coniugato*. Si primum spectes, erit τὸ

$\int \frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{zz + (a - qa)z - qaa}} = AB$ arcui Hyperbolae (Fig^a. 38.) ad Axem primum OAC relatae, ac praeditae Semiaxe *transverso* $OA = a$, *coniugato* $OD = a\sqrt{q}$ ex toties dictis. In hac constructione $x = OC$, et Aequatio ad Parabolam Apollonii, relationem praebens inter x et z, iuxta communem

munem methodum Analystarum, est $(q+1)xx - aa = az$, scilicet Parabola $xx = \left(\frac{a}{q+1}\right)(a+z)$ Parametro gaudens $\frac{a}{q+1}$, Ordinatis x, Abscissis z, et origine Abscissarum earundem per intervallum a subter Verticem a Vertice ipso remota (258). Dum autem spectes Axem secundum, habebis ex praecedentibus $\int \frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{zz+(a-qa)z-qaa}} =$

$\frac{1}{\sqrt{q}}\int\frac{dz\sqrt{qaz}}{2\sqrt{zz+(a-qa)z-qaa}} =$ submultiplo $\frac{1}{\sqrt{q}}$ arcus Hyperbolae GI ad secundum Axem relatae OEF, ac praeditae Semiaxe *transverso* $OG = a\sqrt{q}$, *coniugato* $OK = aq$. Haec constructio supponit Abscissas $x' = OF$; et relatio inter x' ac z in Aequatione consistit, ex Mathematicorum praeceptis (259) passim traditis in Elementis, $(q+1)x'x' + qqaa = qaz$, vel $x'x' = \left(\frac{qa}{q+1}\right)(z-qa)$, ad Parabolam pariter Apollonianam, cuius Parameter $\frac{qa}{q+1}$, Ordinatae x', Abscissae z, et origo harumce Abscissarum ultra Verticem per intervallum qa ab ipso Vertice distans. Hyperbolae vero heic descriptae ABL, GIM *similes* sunt propter $OA:OG::OD:OK$, videlicet $a:a\sqrt{q}::a\sqrt{q}:aq$, quemadmodum liquet, et pluries monui. Semiaxes insuper vel Axes *cognomines* Hyperbolarum earundem GIM, ABL sunt in ratione $\sqrt{q}:1$, uti constat. Submultiplum igitur $\frac{1}{\sqrt{q}}$. GI peraequat arcum in Hyperbola ABL *similem* arcui GI alterius Hyperbolae GIM per Elementa. Et arcus hic *similis* in Hyperbola ABL necessario idem est cum arcu AB, ad quem perduxit prima constructio. Quum etenim z eosdem semper valores habere debeat tam in Formula $\int\frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{zz+(a-qa)z-qaa}}$, quam in alia proposita, quae Coëfficientis artificio adiuvante reapse *identica* est, $\frac{1}{\sqrt{q}}\int\frac{dz\sqrt{qa.z}}{2\sqrt{zz+(a-qa)z-qaa}}$, necesse sit valere Aequationem

$\left(\frac{q+1}{a}\right)xx - a = \left(\frac{q+1}{qa}\right)x'x' + qa$ ex Aequationibus praemissis ortam, qua rite recteque composita fit tandem $x'x' = q(xx - aa)$, seu $x'x' = \frac{a^2 q}{a^2}(xx - aa) = \frac{OD^2}{OA^2}(xx - aa)$; sive, posito utcunque $x = OC$, necessario erit $x' = CB = OE$, et idcirco AB quaesitus arcus *similis* arcui GI, quomodo demonstrandum susceperam. En ergo τὸ $\int \frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{zz+(a-qa)z-qaa}}$ gemino itinere prosequuto constructum, nempe aut sumptis x in primo Axe OAH Hyperbolae ABL ad Axem primum comparatae, aut sumptis x' in Axe secundo OEF (seu Coordinatis respectu x) eiusdem Hyperbolae, a qua gemina constructione idem tamen profluit arcus AB pro τῷ $\int \frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{zz+(a-qa)z-qaa}}$ valore determinando. Nec aliter dicendum de constructione gemina Integralis alterius praecogniti $\int \frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{zz+(qa-a)z-qaa}}$ (vid^ut. §^us. 42^dus.), quippe factis $a = \frac{b}{q}$ et $\frac{1}{q} = q'$, multiplum induit Integralis prioris formae $\sqrt{q'}\int \frac{dz\sqrt{bz}}{2\sqrt{zz+(b-q'b)z-q'bb}}$, eandemque propterea cum Integralibus ad Ellipsium perimetros ducentibus plenam et numeris omnibus absolutam communionem patefacit. Quibus omnibus demonstratis, unde longius digressus sum redeo libenter. Experimenta iteravi quamplurima, ne forte erroris illius superius perpensi Alembertum arguens ipse potius nec eius methodum recte intellexisse, nec rite adplicuisse viderer. Tentamen igitur renovare studui in altera Formula $2\int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{uu \pm fu + bb}} \pm \int \frac{fdu}{\sqrt{u}.\sqrt{uu \pm fu + bb}}$, quam praelaudatus Auctor adfirmat ab unico arcu Hyperbolae dependere (260). Alemberti vestigia aeque fideliter sequens, prouti feceram in lapsu suo detegendo, hypothesin inivi τῷ $y = u$

$\pm$

$\pm \frac{f}{2} + \sqrt{(u \pm \frac{f}{2})^2 + (bb - \frac{ff}{4})}$, quo posito fit $2\int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{uu \pm fu + bb}}$

$$= \sqrt{2}\int \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{yy \mp fy - (bb - \frac{ff}{4})}} - \sqrt{2}\int \frac{(bb - \frac{ff}{4})dy}{y\sqrt{y}.\sqrt{yy \mp fy - (bb - \frac{ff}{4})}}$$

$\mp \sqrt{2}\int \frac{f\,dy}{\sqrt{y}.\sqrt{yy \mp fy - (bb - \frac{ff}{4})}}$, et similiter partem alteram concinnando evadit $\pm \int \frac{f\,du}{\sqrt{u}.\sqrt{uu \pm fu + bb}} =$

$\pm \sqrt{2}\int \frac{f\,dy}{\sqrt{y}.\sqrt{yy \mp fy - (bb - \frac{ff}{4})}}$; adeo ut partibus coniunctis, quum sese destruant $\mp \sqrt{2}\int \frac{f\,dy}{\sqrt{y}.\sqrt{yy \mp fy - (bb - \frac{ff}{4})}} \pm$

$\sqrt{2}\int \frac{f\,dy}{\sqrt{y}.\sqrt{yy \mp fy - (bb - \frac{ff}{4})}}$, remaneat solummodo simplicior Aequalitas $2\int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{uu \pm fu + bb}} \pm \int \frac{f\,du}{\sqrt{u}.\sqrt{uu \pm fu + bb}} =$

$$\sqrt{2}\left(\int \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{yy \mp fy - (bb - \frac{ff}{4})}} - \int \frac{(bb - \frac{ff}{4})dy}{y\sqrt{y}.\sqrt{yy \mp fy - (bb - \frac{ff}{4})}}\right),$$

cuius posterius membrum ex superius ostensis rectificationem unius tantum eiusdemque Hyperbolae repraesentat. Si ergo examen ipsum, quod suscepi, Alembertum vera scribentem veritatem scripsisse confirmat, quanam ratione dubitandum erit de examinis eiusdem fide dum eum a vero aberrasse sub oculos ponit? Ad rem istam promovendam alia etiam molitus. Qui Alemberti placita perlegat eo loci (261), quo Differentialis

$\int$

$\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz \pm fz + bb}}$ integrationem docet primum contemplando casum Trinomii $zz \pm fz + bb$ radices reales habentis, non poterit quin arbitretur universaliter Integrale illud nunquam obtineri, nisi praesidio arcuum simul Ellipseos atque Hyperbolae. Nulla etenim ab Alemberto facta adest inibi limitatio, nullus casus exceptus. In hoc etiam Virum illum clarissimum aliquid humani passum esse experimento moto adinveni. Quum Rudimenta Calculi Integralis in Bougainvillii *Tractatu* adolescens adhuc Pisis pervolutarem (262), forte fortuna sub manum habui *Collectionis Lucensis* Volumen IV^{um}. ac postremum, quod Vincentii Riccati Iesuitae Dissertationem complectitur de *Summa* Formulae differentialis, cuius in sequente §°. sermonem faciam (263). Eam saepenumero Alemberti Formulis comparatus Tabulam mihi composui, qua statim dignoscere possem utrum $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{\pm zz \pm fz \pm bb}}$ in qualibet signorum Trinomii radicibus realibus praediti combinatione ab arcu tantum Hyperbolae, vel ab arcu tantum Ellipseos, vel tandem ab arcubus simul Ellipseos et Hyperbolae dependeret. Tabulae huius auctoritate protinus novi methodum elaboratissimam ab Alemberto traditam illius mentem ita perturbasse, ut casus aliquos singulares excipiendos, ac separatim tractandos haudquaquam viderit. Edendam nunc censeo in publicam lucem Tabulam illam olim in privatos usus conscriptam, casusque exceptos et Alemberto invisos ipsius principiis insistens postmodum confirmabo.

τὸ ∫

τὸ $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{\pm zz \pm fz \pm bb}}$		
I.	Signa $- - -$	Est Imaginarium aut universaliter impossibile.
II.	$- + -$	Pendet a solius Ellipseos Arcu.
III.	$+ + -$	a solius Hyperbolae Arcu.
IV.	$+ - -$	a solius Hyperbolae Arcu.
V.	$- + +$	a solius Hyperbolae Arcu, et Linea recta.
VI.	$- - +$	a solius Hyperbolae Arcu, et Linea recta.
VII.	$+ - +$	ab Arcubus simul Hyperbolae, et Ellipseos, ac Linea recta.
VIII.	$+ + +$	ab unius Arcu Ellipseos, et generaliter simul cum Linea recta.
Dummodo $\pm zz \pm fz \pm bb$ factores habeat reales, ac variabilis sit positiva.		

Hanc Tabulam inspicienti cuncta fere obviam veniunt, quae ex Maclaurino et Alemberto collegimus. Sed quod primum ac praecipuum ictu oculi mihi occurrit perscrutandum, est casus triplicis signi positivi, nimirum VIII^vus., Formulae $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz + fz + bb}}$, quam Alembertus indiscriminatim ope arcuum Ellipseos simul et Hyperbolae integrari docuit, et Tabula ex adverso a solo Ellipseos arcu rem confici nos admonet. Tabulae autem decretum istud iure, an iniuria pronunciatum sit, ab Alemberto ipso discere nihil vetat. Ille igitur ope Algebrae Cartesianae scindit in duo Integrale propositum facto $z + a = y$, reperitque $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz + fz + bb}} = \int \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{yy + ny - mm}} - \int \frac{ady}{\sqrt{y}.\sqrt{yy + ny - mm}}$. Ego autem molestissimo inito Calculo inveni esse $n = -\frac{f}{2} + 3\sqrt{\frac{ff}{4} - bb}$, et $mm =$

$f\sqrt{\frac{ff}{4}-bb}-\frac{ff}{2}+2bb$, ac demum $a=\frac{f}{2}-\sqrt{\frac{ff}{4}-bb}$. Partem alteram, nempe $-\int\frac{ady}{\sqrt{y}.\sqrt{yy+ny-mm}}$, substitutione de more adhibita $y=\frac{mm}{u}$, reducit ad Integrale $\int\frac{adu}{\sqrt{u}.\sqrt{mm+nu-uu}}$. Hoc iterum artificii Cartesiani opibus impetratis vertit in $-\int\frac{adu\sqrt{u}}{m'\sqrt{mm+nu-uu}}$ $+\int\frac{adu.\sqrt{m'+u}}{m'\sqrt{u}.\sqrt{a'-u}}$, videlicet, supposito $u=\frac{mm}{y}$ mutat in $-\frac{a}{m'}\int\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{yy+ny-mm}}+\frac{2a\sqrt{yy+ny-mm}}{m'\sqrt{y}}+\frac{a}{m'}\int\frac{du\sqrt{m'+u}}{\sqrt{u}.\sqrt{a'-u}}$, ita ut denique fiat $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz+fz+bb}}=\int\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{yy+ny-mm}}-\frac{a}{m'}\int\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{yy+ny-mm}}+\frac{a}{m'}\int\frac{du\sqrt{m'+u}}{\sqrt{u}.\sqrt{a'-u}}+\frac{2a\sqrt{yy+ny-mm}}{m'\sqrt{y}}$. Alembertus profecto eo perventus curae non habuit comparationem valorum a et m', quos ego fastidio Calculi non perterritus inter se pares detexi, sive huiuscemodi, ut $\frac{a}{m'}=1$, et ideo ob signorum oppositionem duo arcus Hyperbolici eliminentur. Enimvero ille Scriptor egregius praecepit esse m' aequalem negativae radicis valori positive sumpto Aequationis $mm+nu-uu=0$, seu $uu+(\frac{f}{2}-3\sqrt{\frac{ff}{4}-bb})u+(\frac{ff}{2}-2bb-f\sqrt{\frac{ff}{4}-bb})=0$, quae resoluta praebet $u=\frac{n}{2}\pm\sqrt{\frac{nn}{4}+mm}$, idest $m'=\sqrt{\frac{nn}{4}+mm}-\frac{n}{2}=$

$\sqrt{\frac{ff}{16}-\frac{3f}{4}\sqrt{\frac{ff}{4}-bb}+\frac{9}{4}(\frac{ff}{4}-bb)+f\sqrt{\frac{ff}{4}-bb}-\frac{ff}{2}+2bb}$

$+$

$$+\frac{f}{4}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{ff}{4}-bb}=\sqrt{\frac{ff}{8}-\frac{bb}{4}+\frac{f}{4}\sqrt{\frac{ff}{4}-bb}+\frac{f}{2}-}$$

$$\overline{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{ff}{4}-bb}}=\frac{\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}-bb}}{2}+\frac{\frac{f}{2}-3\sqrt{\frac{ff}{4}-bb}}{2}=\frac{f}{2}-$$

$\sqrt{\frac{ff}{4}-bb}=a$ ex iam praemissis. Ergo $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz+fz+bb}}=$

$\int\frac{du\sqrt{m'+u}}{\sqrt{u}.\sqrt{a'-u}}+\frac{2\sqrt{yy+ny-mm}}{\sqrt{y}}$, nimirum aequale quantitati

Algebraicae aut Lineae rectae una cum $\int\frac{du\sqrt{m'+u}}{\sqrt{u}.\sqrt{a'-u}}$, quod Integrale est arcus Ellipseos per demonstrata in calce §^i^. 34^ti^. directe ex Pascalio, sine necessitate adhibendi prolixiorem methodum Alembertianam (264) ut eadem veritas pateat. Geminum itaque in hac Integralium speculatione periculum offendit doctissimus Alembertus, et quod mirum est a veritate per adversum iter nescio quo fato declinavit. Dum enim agebat de $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz-fz+ff}}$, hoc Integrale ab Ellipseos tantum arcu dependere prodidit, quamvis ab Ellipseos simul et Hyperbolae arcubus consequatur. E contra τὸ $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz+fz+bb}}$, in hypothesi supradicta, Ellipseos et Hyperbolae simul arcubus resolvi putavit, etsi arcu tantum Elliptico sustineatur. Casus igitur VII^um^. et VIII^um^. superioris Tabulae in unum coniunxit Alembertus, tametsi peculiariter tractandi ac dividendi fuissent; adeo ut eius 6^tum^. *Problema* (265) sic potius exponi debuisset.

„ $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz+fz+bb}}$ in hypothesi Factorum Trinomii *realium* a sola pen-
„ det Ellipseos rectificatione; sed $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz-fz+bb}}$ in eâdem hypothesi
„ dependet simul a rectificatione Ellipseos et Hyperbolae. In hypothesi

 vero

„ vero Factorum Trinomii *imaginariorum* $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz \pm fz + bb}}$ pendet universaliter a rectificatione Ellipseos simul et Hyperbolae, excepto unico „ casu singularis expressionis $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz + fz + ff}}$, quae a sola Ellipseos rectificatione dependet. „ Hoc ipsum ex Pascalii doctrina iamdudum conieceram in §°. 33°., et quae tum videbantur *paradoxa* et impossibilia, nunc facile resolvuntur detecto lapsu Alemberti. Quod enim ibi conceptus Geometrarum vires superabat, in praesentia despiciendum est potius, quam admirandum. Profecto, quum in hypothesi Factorum realium Trinomii hoc Integrale $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz + fz + gg}}$ ab Arcu tantum Elliptico dependere nuper ostenderim, ideoque etiam $\int \frac{-dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz + fz + gg}}$, aut per canones vulgatos $-\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz + fz + gg}}$, nil mirum si harum expressionum postrema eundem significet Arcum Ellipseos Casus II'. uti $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz - zz - gg}}$. Nec molestiam afferat dubitationemve aut signum negativum primae Formulae adpositum, aut Linea recta in Casu VIII°. cum Arcu Curvae coniuncta. Quinimmo ab hac potius comparatione deducendum erit posse ac debere negativum Arcum Ellipseos Conicae una cum Linea recta positiva parem esse alteri Arcui Elliptico positivo, scilicet, Summam duorum Arcuum Ellipticorum *rectificabilem* esse posse ac debere. Praeterea, quum ex Elementis Geometriae et Euleri auctoritate (266) constet Arcus Elliptici expressionem quamcumque esse Functionem *biformem* non dissimiliter a Radice *quadratica*, consequitur $\int \frac{-dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz + fz + gg}}$ $= -\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz - zz - gg}}$, nimirum Differentiam inter duos Arcus Ellipticos aeque *rectificabilem* esse posse ac debere. Hoc quoque de Hyperbolicis Arcubus dicendum est, quorum expressiones ad Functiones *biformes*

mes (267) pariter pertinent, veluti *pseudoparadoxon* alterum innuit. In eo enim consistit ex §°. 33^{io}., quod τὸ $\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz \pm fz - gg}}$ eandem Arcus Hyperbolae mensuram significet uti $\int \frac{-dz\sqrt{z}}{\sqrt{gg \pm fz - zz}}$, idest ex Casibus in Tabula contemplatis III°· ac V°., IV°. et VI°. sit tam Differentia, quam Summa duorum Ellipticorum Arcuum geometrice *rectificabilis*. Inde patet quod a doctrina ipsa Pascalii recte riteque perpensa et divite facta enascantur eximia illa Theoremata de Summis aut Differentiis geometrice adsignandis Arcuum quorundam eiusdem Hyperbolae vel Ellipseos seu diversarum Hyperbolarum Ellipsiumve, quae primus omnium Iulius Fagnanus (268), ac postmodum Vincentius Riccatus (269), Leonardus Eulerus (270), Ioannes Alembertus (271), et nuperrime Andreas Lexellius (272) magno Analyseos incremento protulerunt, et demonstrarunt. Ceterum Alembertus toto iure redarguit Vincentium Riccatum eo loci, quo Integralia differentialium $dx \frac{(a + ex^3)^{\frac{r}{2}}}{(m + nx)^{\frac{k}{2}}}$, $dx(m + nx)^{\frac{k}{2}} \times (a + ex^3)^{\frac{r}{2}}$, $dx(m + nx)^{\frac{k}{2}} (a + ex^3)^{-\frac{r}{2}}$ ab arcubus Sectionum Conicarum dependere universaliter existimavit, quum hoc nisi quibusdam exponentium k, r conditionibus positis verum esse nequeat (273). Nonnulla etiam recte indigitat evitanda in ista Integralium theorice Formularum Tractatus Isaaci Newtoni *de Quadratura Curvarum* pericula (274), a se adhuc adolescente etiam alias experta tum quum coram Academia Scientiarum Parisiensi errores aliquot oppugnaverit, in quos lapsus fuit de Mathesi optime meritus Reyneaus in sua *Analysi demonstrata* (275). Qua de re nunquam satis laudandi Commentatores Minimi *Principiorum* Newtoni, qui eo ipso Tractatu aureo semper duce *Elementa Calculi Integralium* scripserunt absqueoquod nullum offenderint scopulum, nec ideo a veritate aberraverint (276). Fundamenta novae methodi suae a Maclaurino sumpsisse Alembertum nemo inficias ibit, qui animadverterit usum aliquem ab Anglo ipso Geometra factum fuisse formulae Arcus Ellipseos

∫

$\int \frac{dx\sqrt{a^4 + k^2 x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$ in II°. Volumine *Tractatus Fluxionum* (277); neque difficile conceptu erat eundem usum promovere, et transferre ad formulam analogam pro Arcu Hyperbolico. Illo autem fundamento posito omnia Integralia huius formae $\int \frac{x^{\pm\frac{n}{2}}}{\sqrt{a + bx + cxx}}$ (dummodo n sit numerus integer ac Trinomium habeat Factores reales) facillime ad Arcus Ellipticos et Hyperbolicos reduci poterant, veluti diverso ab Alemberti semita, ac breviori itinere fecerunt praesertim Riccatus, Eulerus, praecitati Commentatores Newtoni, atque Lexellius (278). Nec parum miror Alembertum ipsum breviori huic itineri terga dedisse, quum in singulari casu integrationis τῆ $x^{\pm\frac{n}{2}}\, dx\,(a + bx + cxx)^{\frac{p}{2}}$ eandem methodum adhibuerit multiplicationis illius Differentialis per $\frac{\sqrt{a + bx + cxx}}{\sqrt{a + bx + cxx}}$ (279), quam solummodo imitari ac prosequi necesse erat si Formulas $\int \frac{dx\sqrt{a + bxx}}{\sqrt{c + exx}}$ in *trinomiales* $\int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{A + Bx + Cxx}}$ earumque derivatas convertendi sermo fuisset, quemadmodum in §°. 42do. pluries innui. Dum autem Trinomium careat Factoribus realibus, maiori etiam facilitate, qua usus est Alembertus, resolvi eae Formulae poterant in *trinomiales* Factoribus realibus praeditas, veluti prae ceteris clarius atque distinctius edocuit Leonardus Eulerus (280). Versans Alembertus idem Formulas magis compositas $\int \frac{(f + gx)\,dx}{\sqrt{a + bx + cxx + ex^3}}$, et $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4}}$, $\int \frac{xxdx}{\sqrt{a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4}}$, earumque quamplurimas derivatas (281), non parum admirationis expertus fuisset si in Pascalio suo illarum prima saltem lineamenta contemplari potuisset, ut in calce §^{i}. 34^{ti}. mihi contigit explicare, et Maclaurini meminisset, qui harumce Functionum ab Arcubus

cubus Conicarum dependentium rudimenta protulerat $\int \frac{dx}{\sqrt{g^2 \pm fx^2 - x^4}}$ $\int \frac{xxdx}{\sqrt{g^2 \pm fx^2 - x^4}}$, quin etiam $\int \frac{dx}{xx\sqrt{\pm g^2 \pm fx^2 - x^4}}$, et Theorema celeberrimum Alemberti τῦ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}.\sqrt{a + bx + cxx}}$ ex alio simpliciore Integrali $\int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a + bx + cxx}}$ facillime derivandi (282), quemadmodum fusius in 42do. §°. ostendi. Nihilo tamen minus praestantissimum Alemberti ingenium tam in *Commentariis Berolinensibus*, quam in *Opusculis Mathematicis* (283) hanc Analyseos partem cum perimetris Conicarum Sectionum coniunctam tot novis Functionibus locupletavit, atque adeo suam fecit, ut vix maius desiderari unquam posse, eiusque inventis aliquid addere dubitaverim. Formularum profecto ab eo resolutarum numerus ferme in immensum excresceret si pro variabili z aut x Potentia quaelibet v^n (ut ipse ait (284)) substitueretur, aut universalius quaevis Functio $\varphi z, \Delta x$ etc. eiusdem variabilis. Maclaurinum denique imitatus vir ille nunquam satis laudandus ad sublimiorem Physicen illustrandam inventa sua traducere curae habuit, nullumque non movit lapidem in *Investigationibus de Mundi Systemate* (285), et in *Opusculorum* Voluminibus (286) ne Theoria ista analytica admodum sterilis videretur. Qua praesertim in re si summum spectes mentis acumen, nulli secundam censeo adplicationem Formularum huiusce modi ad supputandas *perturbationes* mutuas Iovis et Saturni, utpote quas complectatur unica expressio $\int \frac{ds.s^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1 - \frac{(s-a)^2}{b^2}}}$, ubi $a > b$, ex praecedentibus summanda praesidio Arcuum Conicarum Curvarum. Casum autem τῦ $n = 1$, aut $= -3$, qui ab eo derivatur ex praemissis, ab Arcu tantum Ellipseos dependentem dignoscere facillimum est, quum ea Formula facto $s - a = x$ vertatur in $\sqrt{b} \int \frac{dx\sqrt{ab + bx}}{\sqrt{b^2 - x^2}}$, quae

quae comparata cum altera $\int \frac{dx\sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'x}}{\sqrt{\left(\frac{a'^2 - b'^2}{2a'}\right)^2 - x^2}}$ exposita in §°. 34to. praebet Aequationes $a'^2 + b'^2 = ab$, $a'^2 - b'^2 = b^2$, nimirum Semiaxes Ellipseos $a' = \sqrt{\frac{1}{2} b} . \sqrt{a + b}$, $b' = \sqrt{\frac{1}{2} b} . \sqrt{a - b}$, scilicet, in ratione $\sqrt{aa - bb} : a - b$, uti diversam semitam terens Alembertus invenit (287).

44. Ne manca ac mutila sit haec Integralium Calculi pars nobilissima, quam uno duce Pascalio facilius tractandam ac perficiendam cordi habui, poscit res ut de perinsigni Formula $\int \frac{dz\sqrt{f + gzz}}{\sqrt{p + qzz}}$ nunc loquar, argumentum sumens a §§^{s}. 36to. 37mo. 38vo. ac 39no., quibus eam adumbravi. Tres exstant universorum eiusdem *casuum* Tabulae ab eruditissimis Geometris Riccato (288), Eulero (289), Lexellio (290) compositae, indubiumque est Vincentium Riccatum aut omnium primum de ista Functione universaliter integranda cogitasse, aut certe primum cogitationes suas in lucem publicam edidisse, quum eius Disquisitio, quemadmodum alias admonui (291), anno M.DCC.LVII°. vulgata fuerit, priores autem de hoc argumento Leonardi Euleri meditationes anno M.DCC.LXIII°. typis impressae in Volumine VIII°. *Novorum Commentariorum Academiae Petropolitanae*. Quidquid vero sit de inventionis primatu, ternae Tabulae, tametsi varia methodo concinnatae, mire consentiunt inter se, idemque adamussim concludunt. Eulerus quidem atque Lexellius duodecim tantum *casus* enumerant, vigintiduo autem Riccatus. Veruntamen decem adiuncti a postremo scriptore nec locupletiorem faciunt Analysin, neque pauciores *casus* infirmant a primis animadversos. Iure hoc dicam, an iniuria, facile diiudicandum. Riccatus etenim addit *casui* I°. ac II°. Euleri $\int \frac{dz\sqrt{f + gzz}}{\sqrt{p + qzz}}$ alterum geminatum $\int \frac{dz\sqrt{-f - gzz}}{\sqrt{-p - qzz}}$, quorum sane postremorum Integralium utrumque magnitudinis *realis* est, sed eadem haec manet cum prima si per $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = 1$ multiplicetur. Iterum praeter

casus

casus $\int\frac{dz\sqrt{f-+gzz}}{\sqrt{p-qzz}}$, $\int\frac{dz\sqrt{f-+gzz}}{\sqrt{-p-+qzz}}$, $\int\frac{dz\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{p-+qzz}}$,

$\int\frac{dz\sqrt{-f-+gzz}}{\sqrt{p-+qzz}}$, qui sunt in Tabula Euleri III^{tius}. IV^{us}. V^{us}. et IX^{us}.,

considerat $\int\frac{dz\sqrt{-f-gzz}}{\sqrt{-p-+qzz}}$, $\int\frac{dz\sqrt{-f-gzz}}{\sqrt{p-qzz}}$, $\int\frac{dz\sqrt{-f-+gzz}}{\sqrt{-p-qzz}}$,

$\int\frac{dz\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{-p-qzz}}$, eosdem tamen cum prioribus, utpote ab illorum multiplicatione per $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=1$ pariter genitos. Consimili modo praeter Integralia numeris ab Eulero distincta VIII°. ac X°., nimirum,

$\int\frac{dz\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{-p-+qzz}}$ in hypothesi $fq>gp$, $\int\frac{dz\sqrt{-f-+gzz}}{\sqrt{p-qzz}}$ in hypothesi

$fq<gp$, Riccatus idem enumerat $\int\frac{dz\sqrt{-f-+gzz}}{\sqrt{p-qzz}}$, $\int\frac{dz\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{-p-+qzz}}$

in iisdem suppositionibus, quamvis nihil aliud sint quam Euleriana per $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=1$ multiplicata. Ceteris demum *casibus* duo etiam adscribit Riccatus, numeris distinctos VII^{mo}. ac XVIII^{vo}., $\int\frac{dz\sqrt{f-+gzz}}{\sqrt{-p-qzz}}$,

$\int\frac{dz\sqrt{-f-gzz}}{\sqrt{p-+qzz}}$, inutiles autem, quippe semper *imaginarios*. Detractione itaque facta octo *casuum* geminatorum, duorumque inutilium a duo super viginti, remanent duodecim Riccatiani, quemadmodum habent Tabulae Euleri et Lexellii, quas ideo solas citandas mihi proposui, ac earum ordine servato in unam breviorem heic transcribendas, et cum Riccati Tabula comparandas.

I. ex Eulero	$\int\frac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{p+qzz}}$	$fq>gp$	Arcus Hy-
II.	$\int\frac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{p+qzz}}$	$fq<gp$	Arcus Hy-
III.	$\int\frac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{p-qzz}}$	universaliter	Arcus El-
IV.	$\int\frac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{-p+qzz}}$	universaliter	Arcus Hy-
V.	$\int\frac{dz\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{p+qzz}}$	universaliter	Arcus Hy-
VI.	$\int\frac{dz\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{p-qzz}}$	$fq>gp$	Arcus El-
VII.	$\int\frac{dz\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{p-qzz}}$	$fq<gp$	Arcus Hy-
VIII.	$\int\frac{dz\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{-p+qzz}}$	$fq>gp$	Arcus Hy-
IX.	$\int\frac{dz\sqrt{-f+gzz}}{\sqrt{p+qzz}}$	universaliter	Arcus El-
X.	$\int\frac{dz\sqrt{-f+gzz}}{\sqrt{p-qzz}}$	$fq<gp$	Arcus Hy-
XI.	$\int\frac{dz\sqrt{-f+gzz}}{\sqrt{-p+qzz}}$	$fq>gp$	Arcus El-
XII.	$\int\frac{dz\sqrt{-f+gzz}}{\sqrt{-p+qzz}}$	$fq<gp$	Arcus Hy-

perbolae et Ellipseos	I. ex Lexellio	II. XIII. ex Riccato
perbolae	II.	I. XII.
lipseos	V.	III. XIV.
perbolae et Ellipseos	IX.	IV. XV.
perbolae et Ellipseos	III.	V. XVI.
lipseos	VI.	VIII. XIX.
perbolae	VII.	IX. XX.
perbolae et Ellipseos	X.	XI. XXII.
lipseos	IV.	VI. XVII.
perbolae	VIII.	X. XXI.
lipseos	XI.	VIII. XIX.
perbolae	XII.	IX. XX.

Prima

Prima in hanc Tabulam animadversio *casus* VII^{um}. ac X^{um}., IX^{um}. atque XI^{um}. respiciat necesse est, propterea quod Eulerus, et post illum Lexellius Arcui Hyperbolae atque Ellipseos addiderint etiam Quantitatem algebraicam aut Lineam rectam, quam ego cum Riccato arbitror praetereundam. Non modo enim algebraicum Integrale additum vel ablatum neque perturbat Functionis speciem a perimetro Sectionum Conicarum dependentem, nec intimam eius naturam immutat, verum etiam per ea, quae dixi in §°. antecedente, otiosa plerumque est atque inutilis superadditio, Calculi potius defectui adscribenda, quam analyticae necessitati. Hoc ipsum confirmant Eulerus atque Lexellius, qui in eorum lucubrationibus dum implicatas plerumque substitutionum methodos adhibent Riccatianis non dissimiles (293), *casus* praesertim VI^{um}. atque XII^{um}. iuxta Tabulam Eulerianam iterum resolvunt etiam ope Arcus Ellipseos aut Hyperbolae cum Quantitatis algebraicae additamento aut παρενθήκῃ, quamvis prima ac directa eorundem *casuum* resolutio ab Arcu tantummodo consequatur Ellipseôs vel Hyperbolae (294). Quod praeterea clarius patet comparando *casum* VII^{um}. cum XII^{mo}., ac VI^{um}. cum XI^{mo}. in ordine Euleri. Namque Formula *casus* VII^{mi}., nempe $\int \frac{dz\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{p-qzz}}$ cum conditione τῷ $fq<gp$, eadem est atque $\int \frac{\sqrt{-1}\,.\,dz\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{p-qzz}} =$. $\int \frac{dz\sqrt{-f+gzz}}{\sqrt{-p+qzz}}$ cum ipsamet conditione. Quum igitur postremum hoc Integrale ad fidem Tabularum Euleri et Lexellii ab unico pendeat Hyperbolae arcu, non potest quin idem aeque verum sit de priori Integrali, quod Auctores illi ab arcu Hyperbolico et Quantitate simul algebraica obtineri in Tabulis descripserunt (295). Similiter Formula *casus* VI^{i}. $\int \frac{dz\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{p-qzz}}$ cum conditione $fq>gp$ ex auctoritate Tabularum Euleri et Lexellii unius arcus Ellipseos praesidio integratur: ergo, quum in eâdem conditione procul dubio sit esse $\int \frac{dz\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{p-qzz}} =$

$\int$

$\int \frac{\sqrt{-1} \,.\, dz \sqrt{f - gzz}}{\sqrt{-1} \,.\, \sqrt{p - qzz}} = \int \frac{dz \sqrt{-f + gzz}}{\sqrt{-p + qzz}}$, qui est *casus* XI^us^., nemo non videt istum quoque integrari debere ope solius arcus Elliptici, tametsi praelaudati Scriptores Quantitatem addiderint algebraicam (296). Riccati Tabula hoc ipsum ictu oculi ostendit: habet enim *casibus* VI°. et XI^mo. Tabularum Petropoli editarum oppositos eosdem numeros VIII^um. ac XIX^oum., non secus atque ipsos numeros IX^um. et XX^mum. oppositos aliis *casibus* VII^mo. ac XII^mo. Argumentum alterius animadversionis sit dubium illud, quod in calce §^i. 39^ni. soluturum pollicitus fui. Criterium inibi optabatur, praesidio cuius statui posset an eadem expressio $\int \frac{dz \sqrt{f - gzz}}{\sqrt{p - qzz}} = \int \frac{dz \sqrt{-f + gzz}}{\sqrt{-p + qzz}}$, ex praemissis, ad arcum Ellipseos, aut Hyperbolae pertineret. Tabula inspecta, sunt haec Integralia *casus* VI^us. et XI^mos. Euleriani, vel VII^os. ac XII^mus., qui Ellipsin adtinent si $fq > gp$; si vero $fq < gp$, ad Hyperbolen referuntur. Huius *conditionis* veritas dimanat facillime a doctrina ipsa Pascalii, et signanter a demonstratis in §§^is. 37mo. ac 39no., propterea quod in priori τὸ $\int \frac{dx \sqrt{f - gx^2}}{\sqrt{h - kx^2}}$ peraequabat Arcum Ellipticum multiplicatum per Coëfficientem $\sqrt{\frac{fk - gh}{hk^2}}$, et idcirco $fk > gh$, sive *speciebus* iisdem positis, $fq > gp$; in altero autem liquet esse $ma''^2 \,.\, nq^2 < m\left(\frac{p'}{2a''} + 1\right)q^2 \,.\, na''^2$, scilicet $fk < gh$, aut potius $fq < gp$, iisdem litteris substitutis. Sed doctrina eadem Pascalii nullis opibus impetratis, et admiranda simplicitate Tabulam conficit omnem, absqueoquod obliquis plerumque methodis hactenus evulgatis (297) animum adplicemus. Hoc quomodo fiat brevi enarrabo. Tres e duodecim suae Tabulae formulis, nimirum, *casus* III^ium. VI^tum. ac XII^mum. (298), Eulerus resolvit directa methodo utens, nulloque alio subsidio praeter Functiones elementorum Arcuum Conicarum Curvarum, dum Riccatus atque Lexellius quartam Formulam adiunxerunt II°. *casui* pertinentem (299).

 Discri-

Discriminis ratio in eo sita est, quod Eulerus Formulam elementi Arcus Ellipseos derivaverit ab istius Curvae Aequatione non tam ad Axem *transversum* (VI.), quam ad *coniugatum* relata (III.); in Hyperbola vero non item, quum sola Aequatione ad primum Axem contentus fuerit (XII.), et idcirco indirecte obtinuerit *casus* II[di]. resolutionem (300). Huic tamen incommodo ferias iam dixerat multis retro annis Vincentius Riccatus (301), ac post Eulerum medelam afferre curavit Lexellius (302). Ego autem quaternas formulas primigenias ex solo Circulo ad Pascalii morem considerato perquam facillime sum consequutus. In §°. etenim 36°. habui τὸ $\int \frac{dx\sqrt{f+gxx}}{\sqrt{h-kxx}}$ sine ulla limitatione et *universaliter* (III.) ab Arcu Ellipseos super Axem minorem repraesentatum, quum et Semiaxes et Semiparametrum et Coëfficientes omnes, quicumque fuerit valor τῶν f, g, h, k, demonstratum inibi sit nunquam in *imaginarios* aut falsos abire posse. Praeterea in §°. 37[mo]. inveni τὸ $\int \frac{dx\sqrt{f-gxx}}{\sqrt{h-kxx}}$ (VI.) ab Arcu Ellipseos super Axem maiorem insistentis dependens, cum *conditione* tamen nuperrime exposita τῷ $fk > gh$. Qua occasione observandum censeo deduci facile ab expressionibus §¹. 36[ti]., ob signum permutatum unius g, valores Semiaxis $\sqrt{\frac{f(fk-gh)}{hk}}$, Semiparametri $\left(\frac{fk-gh}{fk}\right)\sqrt{h}$, et Integralis ipsius $\sqrt{\frac{fk-gh}{hk^2}}$ in Arcum Ellipticum. Dum igitur resolvendum fuerit τὸ $\int \frac{dx\sqrt{f-gxx}}{\sqrt{h-kxx}}$ in opposita conditione $fk < gh$, qui est *casus* VII[us]. Tabulae Euleri, patet Integrale istud resolvi in Arcum Ellipseos *imaginariae* (quia tum Semiaxe et Semiparametro *imaginariis* praeditae) per Coëfficientem pariter *imaginarium* $\sqrt{\frac{fk-gh}{hk^2}}$ multiplicatum. Hoc autem productum *imaginarii* per *imaginarium* iam alias in calce §¹. 33[ii]. expertus sum *realem* componere magnitudinem, et reapse in praesenti *casu* est Arcus Hyperbolae, quemadmodum inferius ostendam.

Formula

Formula $\int \frac{dx\sqrt{f+gxx}}{\sqrt{h+kxx}}$ (II.), quam Eulerus indirecto admodum tramite adeptus est (303), profluit statim ex §°. 38vo. *conditione* posita τῦ $fk < gh$; namque significat ibi Arcum Hyperbolae ad secundum Axem comparatae, atque in expressione primitiva, a qua oritur ipsa Formula universalior, habetur $a'^2 . 1 < a'^2 \left(\frac{p'}{2a'} + 1\right)$. Si demum Hyperbola ad primum Axem relata fuerit, docet §^{us}. 39us. hoc Integrale $\int \frac{dx\sqrt{-f+gxx}}{\sqrt{-h+kxx}}$, ad quod pertinet *casus* XII^{mus}. Eulerianus, Arcui Hyperbolico par esse dummodo vera sit eadem superior *conditio* $fk < gh$, quum I^{us}. c^{us}. ostendat $fk = mnq^2a''^2$, et $gh = mnq^2a''^2\left(1 + \frac{p'}{2a''}\right)$. Antequam ultra progrediar considerationes quaedam me vocant praemissis addendae. Primum etenim inspiciendum est quanto maior adsit facilitas in origine illius Formulae canonicae $\int \frac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{h+kzz}}$, aliarumque simillum dum a Superficie Cylindri *scaleni*, sive a Pascalii doctrina diducatur, potius quam a communi methodo Analyseos cultorum. Profecto Analystae ut Formulam illam consequantur, necesse habent elementa prius quaerere Arcuum Sectionum Conicarum, praeterea pro abscissa eius multiplum substituere, deindeque multiplum elementi ipsius computare, veluti Eulerus potissimum (304), et paucis abhinc annis Ioannes Franciscus Malfattus (305) protulerunt. Veruntamen a Cylindri consideratione dives ita et pene numeris omnibus absoluta Formula exoritur, ut solo multiplo abscissae (quemadmodum dictum est in §°. 36to. ac sequentibus) res omnis perficiatur. Quin etiam facilius si ad morem Lexellii (306) Formulam ipsam canonicam composuerimus: namque ex. gr. τὸ $\int \frac{dz\sqrt{m^2a^2+n^2zz}}{\sqrt{a^2-zz}}$ statim ac a Cylindro natum, non modo formam adquirit Lexellianam

$m\int \frac{dz\sqrt{1+\left(\frac{n}{ma}\right)^2 zz}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{a}\right)^2 zz}}$, sive, neglecto Coëfficiente,

$\int \frac{dz\sqrt{1+gzz}}{\sqrt{1-qzz}}$ (307), verum et nullam Formulae *limitationem* patefacit, eoquod discamus a §°. eodem 36to. τὸ n quomodolibet esse posse aut maius, aut minus m ex natura *obliqui* Cylindri, mirabiliter consentiente cum Tabulis laudatorum Scriptorum. E contra in §°. 37mo. Integrale huius formae $\int \frac{dz\sqrt{m^2a^2-n^2zz}}{\sqrt{a^2-zz}}$ est iuxta Lexellium, eiusque Tabulam, $m\int \frac{dz\sqrt{1-\left(\frac{n}{ma}\right)^2 zz}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{a}\right)^2 zz}} = \int \frac{dz\sqrt{1-gzz}}{\sqrt{1-qzz}}$, non computando Coëfficientem, quo tamen in casu τὸ n prioris exempli *imaginarium* evadit, m manente *reali*; quod denotat, confirmatque praeceptum illud Geometriae nunquam gigni posse in Cylindri superficie *scalena* Ellipsin lateribus normalem, cuius Axis lateribus ipsis perpendicularis maior sit Axe altero. Si vero $n=m$, aut $\sqrt{n^2+m^2} : m :: \sqrt{2} : 1$, nemo non videt in primo exemplo locum fieri Integrali $\int \frac{dz\sqrt{1+gzz}}{\sqrt{1-gzz}}$, quod ex dictis tam in §^{is}. 4to. 36to. 40mo. ac 43^{io}., quam in Adnotatione 159na., par est Arcui singularis Ellipseos, quae Axes habeat in proportione $\sqrt{2} : 1$, et de qua multa scripsit Vincentius Riccatus (308). Exemplum autem posterius in eâdem hypothesi $n=m$, sive Integralis $\int \frac{dz\sqrt{1-gzz}}{\sqrt{1-gzz}}$, praeberet ex adverso $z+C$, videlicet Lineam rectam, ob p (§. 37.) eo casu evanescentem, ideoque etiam Axem minorem. Haec Linea recta aeque oritur dum in exemplorum primo aut fuerit $\frac{n}{m} = \frac{\infty}{1}$, aut $m=0$. Integrale

etenim

etenim vertitur in $\frac{mn}{ma}\int\frac{z\,dz}{\sqrt{\frac{a^2-z^2}{a^2}}}=n\int\frac{z\,dz}{\sqrt{a^2-z^2}}=C-$ $n\sqrt{a^2-z^2}=n\,(a-\sqrt{a^2-z^2})$, quemadmodum mihi ex Cylindro innotuerat (tametsi suae novae methodi vires casum istum Eulerus ipse exsuperare professus sit) (309), utpote Axe minore Ellipseos Pascalii tunc in nihilum abeunte. Posito demum $\frac{n}{m}=\frac{1}{\infty}$, vel potius $n=0$, liquet Integralia ipsa prioris et alterius exempli formam communem induere

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-qzz}},\ \text{sive}\ \frac{1}{\sqrt{q}}\int\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{q}-zz}},\ \text{aut}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{q}}.dz}{\sqrt{\frac{1}{q}-zz}},$$

quod est Arcus Circuli radium habentis $\frac{1}{\sqrt{q}}=a$, Cylindro reapse *scaleno* tum in rectum converso, ideoque Ellipsi in aequilateram seu in Circulum permutata. Quae omnia ab Elementis Geometriae derivata mirum in modum conveniunt cum novo ac sublimi Euleri Calculo (310), non secus atque cum recentioribus inventis Lexellii (311). Riccatus ait (312) in secundo etiam exemplo tum oriri Ellipsin, cuius Axes in proportione sint τὸ $\sqrt{2}:1$, quum Formula evadat $\int\frac{dz\sqrt{1-gzz}}{\sqrt{1-2gzz}}$, sive more meo quum $\frac{n}{m}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, aut ex §°. 37mo. $-\left(\frac{p}{2a}-1\right)=\frac{n^2}{m^2}=\frac{1}{2}$, videlicet $\frac{p}{2a}$ $=\frac{1}{2}$, quae postrema Aequatio Semiaxium revera aut Axium Quadrata in dupla esse proportione luculenter ostendit. Addit Eulerus (313) τὸ $\int\frac{dz\sqrt{1+gzz}}{\sqrt{1-qzz}}$ in casu $q=0$ ab Arcu Parabolae conicae aut a Logarithmis dependere; quod meridiana luce clarius effulget inspiciendo Formulam $\int dz\sqrt{1+gzz}$ Aream Hyperbolae ad secundum Axem significantem

tem

tem, non dissimiliter ab alia Formula $\int dz\sqrt{1-gzz}$ repraesentante Aream vel Arcum Circuli, in quam abit Integrale posterius $\int \frac{dz\sqrt{1-gzz}}{\sqrt{1-qzz}}$ eâdem hypothesi facta (314). Multominus novum ac difficile fore arbitror Theorema illud ab Euleri Calculo suppeditatum, Integralia nimirum praenotata duos Ellipsium *similium* Arcus semper complecti (315). Praeterquamquod sola Synthesi geometrica id demonstraverim in §°. 8vo. (ac postmodum de innumeris Ellipsibus), cum Riccato consentio (316) non Ellipsi tantummodo, sed etiam Hyperbolae communem esse versionis unius Arcus in alterum adfectionem. Sententia enim Euleri decernit Perimetros integras, aut partes *similes* Ellipsium *similium*, quarum Axes alterni fuerint a, $\frac{1}{a}$, et utrarumque Parameter $e = 1$, ad Axes tamen alternos pertinens, proportionem servare $a^{\frac{3}{4}} : \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}$, sive $a\sqrt{a} : 1$; quod nemo inficias ierit semel ac observaverit Axem primum unius Ellipseos esse a, secundum $\sqrt{ae}$, Axem primum alterius $\frac{1}{\sqrt{ae}}$, secundum $\frac{1}{a}$. Nam ita compositae Ellipses necessario *similes* sunt, exeoquod $a : \sqrt{ae} :: \frac{1}{\sqrt{ae}} : \frac{1}{a}$, et idcirco totarum perimetrorum, partiumve *similium* ratio dimanet $a : \frac{1}{\sqrt{ae}} = a\sqrt{ae} : 1 = a\sqrt{a} : 1$ ob Parametros $e = 1$, $\frac{1}{e} = 1$, quemadmodum patet. Sed idipsum faciliter de Hyperbolis comprobatur quum *similes* aeque Hyperbolae sint, quas adtineant Axes $a^{\text{I}^{us}.}$, $\sqrt{ae}^{\text{II}^{us}.}$, $e^{\text{Par. I}^{a}.}$; $\frac{1}{\sqrt{ae}}^{\text{I}^{us}.}$, $\frac{1}{a}^{\text{II}^{us}.}$, $\frac{1}{e}^{\text{Par. II}^{a}.}$; adeo ut facto $e = 1$, non tam infinite-longae perimetri harumce Hyperbolarum, quam *similes* quotlibuerit earundem Arcus proportione gaudeant $a\sqrt{a} : 1 = a^{\frac{3}{4}} : \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}$,

Arcu-

Arcuumque unum semper in alterum permutare Geometrae iure optimo possint. Servato eodem ordine breviter nunc adnotabo singulares aliquot casus utriusque Formulae primigeniae Arcum Hyperbolicum includentis. Ac primum in $\int\frac{dz\sqrt{-f+gzz}}{\sqrt{-p+qzz}}$ transversum Axem respiciente, seu potius iuxta Lexellium $\int\frac{dz\sqrt{-1+gzz}}{\sqrt{-1+qzz}}$, neque g, neque q separatim in nihilum abire unquam poterunt ad *imaginaria* vitanda, et simul evanescendo aut sese peraequando praebent identidem $\frac{z\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=\frac{z.1}{1}=$(ad maiorem universalitatem) $z+C$, videlicet rectam Lineam, coniugato Curvae Axe, ut prius in Ellipsi, nullescente. Hyperbola vero, quo ducit eadem Formula, fit aequilatera dum ita exprimatur $\int\frac{dz\sqrt{-f+gzz}}{\sqrt{-2f+gzz}}$, veluti statuunt Riccatus (317) aliique post eum; nam ex §§is. 24to. et 39no., et solo Circulo contemplato ostendi (ob $\frac{p'}{2a''}+1=2$) Arcum Hyperbolae aequilaterae formam peculiarem induere $\int\frac{dz\sqrt{2zz-1}}{\sqrt{zz-1}}=$

$$\sqrt{2}\int\frac{dz\sqrt{zz-\frac{1}{2}}}{\sqrt{zz-1}}=\sqrt{2g}\int\frac{dx\sqrt{gxx-\frac{m}{2}}}{\sqrt{gxx-m}}=\int\frac{dx\sqrt{gxx-f}}{\sqrt{gxx-2f}}$$

Coefficiente neglecto. Isthuc ipsum expertus sum in altera Arcus Hyperbolici expressione primigenia, quae coniugatum respicit Axem, et effertur hoc modo $\int\frac{dz\sqrt{1+gzz}}{\sqrt{1+qzz}}$ si compendiaria Lexellii Formula utaris. Enimvero consultis §§is. 24to. et 38vo. Arcus Hyperbolae exprimitur per $\int\frac{dx\sqrt{a^2+2x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}$ statim atque aequilatera fuerit, scilicet brevius

$\sqrt{2}\int$

$\sqrt{2}\int\frac{dx\sqrt{\frac{aa}{2}+xx}}{\sqrt{aa+xx}}$, aut $\sqrt{2g}\int\frac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{2f+gzz}}$, vel absque Coefficiente $\int\frac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{2f+gzz}}$ ita ut, eâdem conditione posita, utraque Formula ad aequilateram Hyperbolen referatur (318). Prior expressio $\int\frac{dz\sqrt{gzz-f}}{\sqrt{qzz-p}}$ dum $f=0$, in Lineam rectam abit $\sqrt{\frac{g}{q}}.\sqrt{zz-\frac{p}{q}}+C$, quod indicat Integrale tum consequi ab Ordinatis ad primum Axem aequilaterae Hyperbolae, veluti antea in Ellipsi dependere inventum est Integrale ab Ordinatis Circuli, seu admirabili analogia ab Ordinatis aequilaterae Ellipseos, Curvamque totam in Rectam se vertere. Idem contingit etiam Formulae $\int\frac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{p+qzz}}$. Nam facto $f=0$, exinde nascitur recta Linea $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{q}}.\sqrt{zz+\frac{p}{q}}$, sive $\frac{\sqrt{g}.\sqrt{qzz+p}}{q}+C$ uti dixit Eulerus (319). In eodem Integrali $\int\frac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{p-qzz}}$, ubi $q=0$, nemo non videt Hyperbolam in Parabolam verti, et ideo Arcui Parabolico, vel Areae Hyperbolicae, seu potius Logarithmis (320) locum fieri, non secus ac supra in Ellipsi. Et revera Parabolam Apollonianam norunt omnes *limitem* esse tam innumerarum Ellipsium, quam innumerarum Hyperbolarum. Cetera linquo, quia nec minus obvia, nec salebrosa. Unum duntaxat praeterire nequeo, Eulerum, scilicet, ideo potuisse Formulam *casus* II[di]. suae Tabulae, quae directum complectitur Arcum Hyperbolae relatae ad secundum Axem, integrare nihilominus praesidio Arcus Hyperbolae alterius primo Axi comparatae (321), eoquod duo illae Hyperbolae ex demonstratis in §°. praecedente per doctrinam Pascalii, huiuscemodi sint, ut vel unam vel alteram tractes eodem perducant (322). Quod dictum velim ne forte τὸ παράδοξον Eulerianum Analyticis legibus subtrahi aliquis senserit.

serit. In eo tamen maximopere effulgent vis et praestantia doctrinae Pascalii, quod sibi ipsi sufficiat ad reliquos omnes Tabulae superioris *casus* perquam facillime resolvendos. De primigeniis quatuor, nimirum III°. VI°. II°. ac XII°. abunde iam dictum; nunc quinam alii *casus* ab istis oriantur dicendum erit. Si $\int \frac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{p-qzz}}$ (III.) dividas per $\sqrt{-1}$, obtinebis *casum* IV^{um}., nimirum $\int \frac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{-p+qzz}}$ sine ulla *conditione* uti III^{us}., a quo derivatur. Sed inter alia §§^{is} 33^{ii}. iam ostendi Arcum quemlibet Ellipseos conicae $\left(\text{quemadmodum est} \int \frac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{p-qzz}}\right)$ divisum per $\sqrt{-1}$ Formulam generare ab Arcubus simul Ellipseos et Hyperbolae dependentem (§§. 33. 34). Igitur $\int \frac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{-p+qzz}}$ *universaliter* Arcus indigitat Hyperbolae simul et Ellipseos, atque praedictae Tabulae congruit. Venio ad *casum* XI^{mum}., nempe ad $\int \frac{dz\sqrt{-f+gzz}}{\sqrt{-p+qzz}}$, qui casus idem est cum $\int \frac{dz.\sqrt{-f+gzz}.\sqrt{-1}}{\sqrt{-p+qzz}.\sqrt{-1}} = \int \frac{dz\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{p-qzz}}$, nimirum cum VI°. iam resoluto, et eâdem praesupposita *conditione* τῆ $fq > gp$ Arcum Ellipticum adtinente. A *casu* ipso VI°. $\int \frac{dz\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{p-qzz}}$, dum Formula haec dividatur per $\sqrt{-1}$, enascitur VIII^{us}. *conditione* servata $fq > gp$, quum divisione facta consequatur $\int \frac{dz\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{-p+qzz}}$; quod postremum idcirco ex praecitato §°. 33^{io}. ab Arcubus simul Ellipseos et Hyperbolae integrationem adquiret. Faciliter etiam ab Arcu Hyperbolae *casus* XII^{i}. $\int \frac{dz\sqrt{-f+gzz}}{\sqrt{-p+qzz}}$ cum eâdem *conditione* $fq < gp$, si pariter per $\sqrt{-1}$ Formulam illam diviseris, profluit *casus* X^{us}. Tabulae Euleri, nempe

$\int\frac{dz\sqrt{-f+gzz}}{\sqrt{p-qzz}}$, quod Integrale, aeque ac primum, ex antea citato §°. 33[io]. ab Arcu tantum Hyperbolico dependebit. Consimiliter ab Arcu Hyperbolae *casus* X[mi]., scilicet, $\int\frac{dz\sqrt{-f+gzz}}{\sqrt{p-qzz}}$ multiplicato per — $\sqrt{-1}$ dimanat $-\int\frac{dz\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{p-qzz}}$, aut signo neglecto $\int\frac{dx\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{p-qzz}}$; quod Integrale illud est, cui Tabula Euleri praefigit numerum VII[um]. Eàdem itaque *conditione* sarta tecta $fq<gp$, docet §[us]. ipse 33[ius]. hanc VII[am]. Formulam solummodo Hyperbolae Arcum complecti, quum ibi viderimus (posito s Arcu quocumque Hyperbolico) fore $-s\sqrt{-1}=\frac{s}{\sqrt{-1}}$, atque τὸ $\frac{s}{\sqrt{-1}}$ demonstraverim paulo antea Hyperbolicum semper Arcum indigitare. Simplicius quoque hoc ipsum arguitur animadvertendo (VII.) $\int\frac{dz\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{p-qzz}}=\int\frac{dz\sqrt{-f+gzz}}{\sqrt{-p+qzz}}$ (XII.) per $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ eàdem *conditione* servata. Praeter *casus* ergo quaternos primigenios III[ium]. VI[um]. II[um]. XII[mum]. fidem meam liberavi de IV[to]. XI[mo]. VIII[vo]. X[mo]. ac VII[mo]., remanentque tandem enodandi V[us]. IX[us]. ac I[us]. Dum agebam de Formulis Maclaurini in §°. 42[do]. Pascalii Theorema mihi suppeditavit τὸ

$$\int\frac{dz\sqrt{f-gzz}}{\sqrt{p+qzz}}(\text{V.})=\int\frac{fdz-gzz}{\sqrt{f-gzz}\,.\sqrt{p+qzz}}=$$

$$f\int\frac{dz}{\sqrt{f-gzz}\,.\sqrt{p+qzz}}-g\int\frac{zzdz}{\sqrt{f-gzz}\,.\sqrt{p+qzz}}=$$

$$\frac{f}{p}\int\frac{dz\sqrt{p+qzz}}{\sqrt{f-gzz}}-\left(\frac{fq}{p}+g\right)\int\frac{zz\,.dz}{\sqrt{p+qzz}\,.\sqrt{f-gzz}}\ (323),$$ nimirum *universaliter* complectens Arcum Ellipticum, et Hyperbolicum. Sed aeque *universaliter* in §°. 33[io]. unius Pascalii praesidio statutum fuit huiuscemodi Integrale ab Arcubus simul Ellipseos, et Hyperbolae dependens, si per $\sqrt{-1}$ multiplicetur, Formulam gignere, quae ope unius Arcus Elliptici

lipticis' resolvi possit. Igitur $\int\frac{dz\sqrt{f-gzz}\,.\,\sqrt{-1}}{\sqrt{p+qzz}} = \int\frac{dz\sqrt{-f+gzz}}{\sqrt{p+qzz}}$, quod Euleri *casui* IX°. adamussim congruit, integrabitur per Arcum Ellipseos. Nec longius immorari necesse est in *casus* I^mi. resolutione, utpote $\int\frac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{p+qzz}}$ in *conditione* τῆ $fq > gp$, quam iubet Tabula Euleri, convertatur post factum τὸ $f+gzz = x$ in Formulam *trinomialem* $\frac{1}{2\sqrt{q}}\int\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-\frac{(2fq-gp)}{q}x+\frac{f(fq-gp)}{q}}}$, secundo denominatoris termino ex hypothesi semper negativo existente, primoque ac tertio positivis. Hoc autem Integrale si per $\sqrt{-1}$ dividatur, in alterum abit indutum formam Alembertianam $\frac{1}{r}\int\frac{dv\,.\,\sqrt{v}}{\sqrt{mv-vv-nn}}$, quod ex Pascalio Arcum indicat unius Ellipseos. Verum in comparatione Formularum V^ta. ac IX^a. demonstravi Integrale illud, quod multiplicatum per $\sqrt{-1}$ aut potius divisum per $-\sqrt{-1}$ Formulam generaverit ab unius Ellipseos Arcu dependentem includere Arcus simul Ellipticum et Hyperbolicum. Huiuscemodi igitur erit $\int\frac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{p+qzz}}$ dummodo $fq > gp$; quod in Tabulae complementum demonstrare susceperam. Quae quum ita sint, opus paucis absolvi, implexi ac fastidiosi plerumque Calculi pondere fatiscens si vulgatam methodum advoces Analystarum. Ut isthuc ipsum liquido constet, Tabulam novam composui, quae meo ritu servato, cunctorum horumce Integralium *casibus* propriam sedem tribuat, caussamque eorum originis a Pascalii Theoremate prosequatur. Oculis etiam subiiciendam curavi Eulerianae ac meae Tabulae comparationem, ut quo ordine, qua ratione, quibusve legibus incedat res clarius effulgeat, aut a Pascalio aut ab Eulero proficiscatur. Iudicium esto penes Geometras an haec difficillima Integralis Calculi pars, a tot tantisque viris hactenus exculta, Pascalii veluti filo diducto meliori in lumine conlocetur. Mea quidem sententia Tabularum hucusque in lucem publicam editarum ac sequentis, quam adiicio, sedula et fidelis conlatio litem dirimit omnem.

$$\int \frac{dz\sqrt{\pm f \pm gzz}}{\sqrt{\pm p \pm qzz}}$$

	Ex Eulero.	Ex Pascalio.	Conditiones.	Signa.
4. Casus primigenii.	III.	I.	universaliter	$+\ +$ $+\ -$
	VI.	II.	$fq > gp$	$+\ -$ $+\ -$
	II.	III.	$fq < gp$	$+\ +$ $+\ +$
	XII.	IV.	$fq < gp$	$-\ +$ $-\ +$
8. Casus derivati.	IV.	V.	universaliter	$+\ +$ $-\ +$
	XI.	VI.	$fq > gp$	$-\ +$ $-\ +$
	VIII.	VII.	$fq > gp$	$+\ -$ $-\ +$
	X.	VIII.	$fq < gp$	$-\ +$ $+\ -$
	VII.	IX.	$fq < gp$	$+\ -$ $+\ -$
	V.	X.	universaliter	$+\ -$ $+\ +$
	IX.	XI.	universaliter	$-\ +$ $+\ +$
	I.	XII.	$fq > gp$	$+\ +$ $+\ +$

Consulantur §§. 33^{tius}. 34^{tus}. 36^{tus}. 37^{mus}. 38^{vus}.

Origines.	Valores.
Ab Ellipsi super Axem minorem.	Arcus unius Ellipseos *directus*.
Ab Ellipsi super Axem maiorem.	Arcus unius Ellipseos *directus*.
Ab Hyperbola ad Axem secundum.	Arcus unius Hyperbolae *directus*.
Ab Hyperbola ad Axem primum.	Arcus unius Hyperbolae *directus*.
A Formula III^a. per $\sqrt{-1}$ divisa.	Arcus Ellipseos et Hyperbolae.
A Formula VI^a. per $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ multiplicata.	Arcus unius Ellipseos *indirectus*.
A Formula VI^a. per $\sqrt{-1}$ divisa.	Arcus Ellipseos et Hyperbolae.
A Formula XII^{ma}. per $\sqrt{-1}$ divisa.	Arcus unius Hyperbolae *indirectus*.
A Formula XII^{ma}. per $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ multiplicata.	Arcus unius Hyperbolae *indirectus*.
A Formula Maclaurini ex Pascalio.	Arcus Ellipseos et Hyperbolae.
Ab eàdem Formula per $\sqrt{-1}$ multiplicata.	Arcus unius Ellipseos *indirectus*.
A Formula Alemberti ex Pascalio per $\sqrt{-1}$ divisa.	Arcus Ellipseos et Hyperbolae.

39^{nus}. 42^{dus}. praeter 28^{vum}. ac 32^{dum}.

Qualicumque huic commentario in praesentia finis adesset nisi Ioannes Franciscus Malfattus Partem secundam II'. Voluminis *Memorabilium Societatis Italicae* suis investigationibus exornare, et Spartam ipsam novis accessionibus locupletare adgressus fuisset (324). Duo potissimum in argumenti huius tractatione, quae Riccatus imperfecta reliquerat, perficere studet Malfattus, reductionem nimirum Formularum quarundam ad geminos tantum Sectionum Conicarum Arcus dum Scriptoris Iesuitae methodus ternos aliquando complectebatur (325), correctionemque molestiae quo loci integratio Formularum *finiti* valoris a differentia *finita* inter asymptotam *infinitam* et *infinitam* pariter Hyperbolicam Curvam hauriri debeat (326). Cetera, quae in praecitata perquisitione continentur, publici iuris facta vertente anno M.DCC.LXXXIV°., neque adeo nova sunt post Lexellii praesertim labores in lucem editos labentibus annis M.DCC.LXXX°., LXXXI°. (327) et a Malfatto perlustratos (328), neque adeo utilia, ut mea sententia ad incrementum Theoriae conferre quodammodo possint. Primum autem incommodum Leonardus Eulerus plusquam viginti annos ante in Volumine VIII^{vo}. *Novorum Commentariorum Academiae Petropolitanae* (329) sedulo effugerat. Quatuor etenim *casus*, qui inibi ab Eulero (pag. 136. 37.) numeris notantur IX°. X°. XI^{mo}. XII^{mo}., respondentque in mea Tabula XII°. VII°. V°. ac X^{mo}. (330), duobus solummodo Conicarum Sectionum Arcubus resolvuntur; quamvis Riccatus eodem ferme tempore scribens, quo scripsit Eulerus (331), *casum* VII^{um}. X^{um}. XII^{um}. et V^{um}., nimirum quatuor omnes, de quibus fit sermo, in meae Tabulae ordinem digestos, integraverit trium Arcuum praesidio impetrato (332). Quod tamen magis admirationi mihi fuit Malfatti placita nuperrima perlegenti in eo versatur methodum ipsam a Malfatto suppeditatam, ut malo Riccatiano remedium adferret, iam in antecessum traditam fuisse ab Eulero. Hoc sane patebit luculentissime si in tanta Lemmatum ac Theorematum copia, quibus Eulerus suam lucubrationem ditaverat (333), comparaveris Lemma I^{um}. Malfatti, a quo negotium pendet omne (pag.^{a} 762.), cum Lemmate II°. Euleriano (pag^{a}. 129.) una cum Theoremate VI°. (pag^{a}. 131.). Namque hac inita comparatione habemus ab Eulero τὸ $\int \frac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{h+kzz}} = \frac{f}{h}\int \frac{dz\sqrt{h+kzz}}{\sqrt{f+gzz}} + \frac{gh-fk}{gh}$.

f

$\int \frac{dx\sqrt{xx-f}}{\sqrt{gh-fk+kxx}}$, substituto pro x valore $\sqrt{f+gzz}$. At

$\frac{1}{g}\int \frac{dx\sqrt{xx-f}}{\sqrt{gh-fk+kxx}} = \int \frac{zzdz}{\sqrt{f+gzz}\,.\,\sqrt{h+kzz}}$ in eâdem substitutione. Igitur ex Eulero consequitur $\int \frac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{h+kzz}} =$

$\frac{f}{h}\int \frac{dz\sqrt{h+kzz}}{\sqrt{f+gzz}} + \frac{gh-fk}{h}\int \frac{zzdz}{\sqrt{f+gzz}\,.\,\sqrt{h+kzz}}$. Istud autem eodem redit ac Lemma I^{um}. Malfatti $\int \frac{dx\sqrt{A+Bx^2}}{\sqrt{C+Dx^2}} = \frac{BC-AD}{C} \times$

$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{A+Bx^2}\,.\,\sqrt{C+Dx^2}} + \frac{A}{C}\int \frac{dx\sqrt{C+Dx^2}}{\sqrt{A+Bx^2}}$, quemadmodum in aperto est; idemque Malfattus substitutione utitur $z=\sqrt{A+Bx^2}$, quam Eulerus adhibuit. Nec tam in arduo positum Lemma ipsum, ut e longinquo petendum fuerit. Resolvitur etenim facilitate perquam maxima in Aequationem *identicam*, veluti expertus sum in §§^{is}. 40mo. et 42do. dum de Fagnani, ac Maclaurini inventis disserui. Quod attinet alteram ipsius Malfatti additionem ne Formulae integrandae ope Arcuum Conicarum ab Infinito quandoque perturbentur, scitu dignum est non modo Vincentium Riccatum tam in Epistola ad Pium Fantonum labente anno M.DCC.LVII°. (334), quam in Epistolis ad Malfattum eundem, et Iordanum Fratrem datis sequentibus annis M.DCC.LVIII°. (335), LIX^{no}. (336) medelam huic infortunio pro virili sua adtulisse, verum etiam subtilius pleniusque vitium omne sanavisse Alembertum in Volumine V^{o}. *Opusculorum Mathematicorum*, Lutetiae Parisiorum vulgato dum annus vertebat M.DCC.LXVIII^{vo}., et rursum in Tomo IV°. *Miscellaneorum Taurinensium* pro anno M.DCC.LXVI^{to}. usque ad LXIX^{um}. (337). Discrimen totum in eo situm est, quod Riccatus, et Alembertus aptis utentes substitutionibus (338) infinitos variabilis valores effugere satagant, Arcusque ideo Hyperbolicos infinite-longos, quum e contra Malfattus isthuc ipsum efficiat in Seriem *convergentem* numero terminorum infinitam convertendo Differentiat

rentiam inter Asymptotam infinite productam et Hyperbolicam Curvam (339). Profecto egregium exsistimo in Calculi praxi Serierum infinitarum usum accommodatum Formulis quoque ipsis, quae pendeant a rectificatione Curvarum, cuius utilitatis testimonium perinsigne ac nulli secundum illud est, quod Scriptor compendii Voluminis VIII[i]. antea citati Petropolitanae Scientiarum Academiae methodum adpropinquationis summis laudibus celebraverit dum Eulerianam Dissertationem de Formula oecumenica $\int \frac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{h+kzz}}$ prosequeretur (340). Quinimo Eulerus ipse suis inventis ingeniosissimis de eàdem Formulà universaliter integranda sedem negavit in Volumine I°. *Institutionum Calculi Integralis*, quo omnigenas unius variabilis Functiones integrare docuit (341), ratus fortasse Serierum Infinitarum commodum, si minus Theoriae amplificandae, magis saltem promovendae eiusdem adplicationi ad enodationem Problematum profuturam (342). Veruntamen Series a Malfatto tradita ad Differentiam inter Asymptoton ac Perimetrum infiniti Cruris Hyperbolici determinandam (pag². 760), nimirum, $\frac{b\phi}{4} + \frac{b\phi}{2}\left(\frac{1^2.b^2}{4.4.a^2} + \frac{3^2.b^2.A'}{4.6.a^2} + \frac{5^2.b^2.B'}{6.8.a^2} + \frac{7^2.b^2.C'}{8.10.a^2} + \text{etc.}\right)$, in qua ϕ sit rationis *exponens* Circumferentiae ad diametrum (343), a Semiaxis transversus Hyperbolae, b distantia Directricis a centro Curvae, et A', B', C' etc. de more significent terminum proxime antecedentem, adeo caret novitatis pretio, ut quadraginta annis in antecessam elapsis eam pervulgaverit Maclaurinus in Capite III[io]. Libri II[i]. *Tractatus Fluxionum*, et signanter §°. 808[vo]. Parisinae versionis. Nam haec Maclaurini Series ita exprimitur $\frac{Na'}{2}\sqrt{\frac{a'}{E}} + \frac{a'A}{2.4E} + \frac{9a'B}{4.6E} + \frac{25a'C}{6.8E} + \frac{49a'D}{8.10E} + \text{etc.}$ (344), in qua $E = \frac{b'b'}{a'} + a'$, supposito b' Semiaxe coniugato, A, B, C, D etc. terminum pariter designant propius antecedentem, N numerus est proportionem sistens Semicircumferentiae ad diametrum, et tandem a' Semiaxis transversus. Itaque $N = \frac{\phi}{2}$, $\frac{a'}{E} =$

$\frac{a'^2}{a'^2 + b'^2} = \frac{b^2}{a^2}$ ex Elementis Conicorum in *speciebus* a Malfatto adhibitis, atque $\frac{Na'}{2}\sqrt{\frac{a'}{E}} = \frac{b\varphi}{4}$. Praeterea $\frac{a'A}{2.4E} = \frac{b^2}{2.4a^2} \times \frac{b\varphi}{4} = \frac{b\varphi}{2} \cdot \frac{1^2.b^2}{4.4.a^2}$, ac similiter $\frac{9a'B}{4.6E} = \frac{9.b^2}{4.6.a^2} \times \frac{b\varphi}{2} \cdot \frac{1^2.b^2}{4.4.a^2} = \frac{b\varphi}{2} \cdot \frac{3^2.b^2}{4.6.a^2} \cdot A'$, et sic de ceteris in infinitum. Ex quo luculenter consequitur Seriem Maclaurinianam, tametsi diversimode expositam, at meo saltem iudicio elegantiorem brevioremque, cum illa recentiori Malfatti adamussim congruere. Neque existimandum est unquam novum in re geometrica inventum fore duas infinite-longas Lineas finita differentia gaudere. Quinimo nonnullae Curvae Hyperbola conica in hoc praestantiores exsistunt, quas inter maxime eminet illa a Nieuporto descripta in II°. Volumine *Memorabilium* Belgicae Imperialis Academiae, typis vulgato vertente anno M.DCC.LXXX^mo^. Ea quippe Curva *nodata*, et asymptotica, sed *transcendens* (*Memoires de l'Académie Imperiale et Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles* pag^a^. 141^a^. et seqq. Fig. 3^a^.), et Aream habens finitae ac determinatae magnitudinis, non modo in infinitum producta a sua asymptoto differt finita longitudine, verum etiam hanc differentiam aequalem esse Rectae genitrici a detexi nuperrime, dum in Hyperbola e contra differentia *transcendens* exsistit. Maius quiddam de altera Serie Malfatti (pag^n^. 753. 54.) $\frac{a\varphi}{2} - \frac{a\varphi}{2}\left(\frac{1.1a^2}{2^2.b^2} + \frac{1.3a^2A}{4^2.b^2} + \frac{3.5a^2B}{6^2.b^2} + \frac{5.7a^2C}{8^2.b^2} + \text{etc.}\right)$ Quadrantem perimetri Ellipseos conicae complectente dicendum esset si cum ea a Maclaurino data (§°. 806°.) $\frac{a\varphi}{2}\left(1 - \frac{k^2}{4a^2} - \frac{3k^4}{64a^4} - \frac{5k^6}{256a^6} - \text{etc.}\right)$ primum recensitam comparare mens fuerit (345). Maclaurinus nuncupat $\frac{k^2}{a^2}$ illud ipsum, quod Malfattus $\frac{a^2}{b^2}$ nominavit, propterea quod $k^2 = a^2 - b'^2$, et $a^2 - b'^2 : a^2 : b^2$ ∺ ex *directricis* natura. Erit ergo Maclaurinianа Series *speciebus* Malfatti exornata $\frac{a\varphi}{2} - \frac{a\varphi}{2}\left(\frac{a^2}{4b^2} + \frac{3a^4}{64b^4} + \frac{5a^6}{256b^6} + \text{etc.}\right) = \frac{a\varphi}{2} - \frac{a\varphi}{2}\left(\frac{1.1a^2}{2^2.b^2} + \frac{1.3a^2A}{4^2.b^2} + \frac{3.5a^2B}{6^2.b^2} + \frac{5.7a^2C}{8^2.b^2}\right.$ + etc.

$+$ etc.$\big)$; videlicet, Maclaurini et Malfatti Series inter se perfecte adeo conveniunt, ut sint unum et idem. Sed quum Eulerus usque ab anno M.DCC.LXXIII°. protulerit in Volumine XVIII°. Academiae Scientiarum Petropolitanae (346) Seriem magis convergentem ac numeris omnibus absolutam pro Ellipseos perimetro determinanda, supervacaneam censeo in Curvarum doctrina perficienda Seriem illam nuperrimam a Malfatto descriptam. Euleri etenim Series Quadrantem perimetri Ellipseos ita oculis subiicit $\frac{c\varphi}{2\sqrt{2}}\Big(1 - \frac{1.1}{4.4}n^2 - \frac{1.1}{4.4}\cdot\frac{3.5}{8.8}n^4 - \frac{1.1}{4.4}\cdot\frac{3.5}{8.8}\cdot\frac{7.9}{12.12}n^6 - \frac{1.1}{4.4}\cdot\frac{3.5}{8.8}\cdot\frac{7.9}{12.12}\cdot\frac{11.13}{16.16}n^8 - \text{etc.}\Big)$, ubi praesuppositis a, b Ellipseos datae Semiaxibus, sit $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, atque $n = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$. Series vero Malfatti est $\frac{a\varphi}{2}\Big(1 - \frac{1.1}{2.2}n'^2 - \frac{1.1}{2.2}\cdot\frac{1.3}{4.4}n'^4 - \frac{1.1}{2.2}\cdot\frac{1.3}{4.4}\cdot\frac{3.5}{6.6}n'^5 - \frac{1.1}{2.2}\cdot\frac{1.3}{4.4}\cdot\frac{3.5}{6.6}\cdot\frac{5.7}{8.8}n'^3 - \text{etc.}\Big)$, existentibus a Semiaxe transverso, et $n' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ex adfectionibus Conicarum. Indubium est autem terminorum *coëfficientes* homologos semper esse minores in Euleri Serie prae illa Malfatti, necnon terminos ipsos homologos, eoquod $n : n' :: \sqrt{a^2 - b^2} : a + \frac{b^2}{a}$, nimirum $n < n'$. Antequam Seriem suam perimetro Ellipseos quammaxime adpropinquantem reperisset Eulerus iamdudum prodiderat in idem argumentum Seriem alteram minus *convergentem* uti testantur veteres *Commentarii* Academiae Petropolitanae (347), *Acta* Berolinensia (348), Volumen II^{um}. eius *Opusculorum* Berolini editorum anno M.DCC.L^{mo}. (349), ac Volumen I^{um}. *Institutionum Calculi Integralis* typis excusum Petropoli vertente anno M.DCC.LXVIII°. (350). Nihilo tamen minus fatendum est istam quoque antiquiorem Seriem Euleri eandem esse cum altera a Maclaurino suppeditata quum anno M.DCC.XLII^{do}. in lucem edidit celeberrimum *Fluxionum Tractatum* (351). Habet enim Scriptor Britannus in praecitato §°. 806°. sic expressam Ellipseos Quadrantem

drantem $\frac{a\phi}{2}\left(1+\frac{k^2}{4a^2}-\frac{3k^4}{64a^4}+\frac{5k^6}{256a^6}-\text{etc.}\right)$ signis tantummodo a Serie priore, quae cum ea Malfatti cohaeret, diversam. Sed τὸ $\frac{k^2}{a^2}$ in Formula Maclaurini $\int\frac{dp\sqrt{a^4+k^2p^2}}{a\sqrt{aa-pp}}$ est idem cum $\frac{a'}{1}$ in Formula Euleri $\int\frac{dx\sqrt{1+a'xx}}{\sqrt{1-xx}}$ (352). Igitur $\frac{a\phi}{2}\left(1+\frac{k^2}{4a^2}-\frac{3k^4}{64a^4}+\frac{5k^6}{256a^6}-\text{etc.}\right)=\frac{\phi}{2}\left(1+\frac{1.1}{2.2}a'-\frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}a'^2+\frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6}a'^3-\frac{1.1.1.3.3.5.5.7}{2.2.4.4.6.6.8.8}a'^4+\text{etc.}\right)$ veluti Eulerus exposuit. Ab ista Maclaurini et Euleri Serie statim deducitur Quadrans Peripheriae circularis $\frac{a\phi}{2}$ aut $\frac{\phi}{2}$, dum k et a' in nihilum abeant, Series autem altera Maclaurini et Malfatti ad ipsum pertinens Quadrantem Ellipticum, quum $b=\infty$, scilicet, tum quum in Quadrantem Circularis perimetri convertatur, praebet similiter $\frac{a\phi}{2}$; seu potius alio modo exposita tribuit in hypothesi τοῦ $n'=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=a$, dum secundus Semiaxis b Ellipseos datae evanescat, $\frac{a\phi}{2}\left(1-\frac{1.1}{2.2}-\frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}-\frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6}-\frac{1.1.1.3.3.5.5.7}{2.2.4.4.6.6.8.8}-\text{etc.}\right)$. Nec dissimiliter etiam Series Euleri facto $b=a$, nempe $n^2=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=0$, et idcirco $c=\sqrt{a^2+b^2}=a\sqrt{2}$, Quadrantem suppeditat Circularis Peripheriae $\frac{c\phi}{2\sqrt{2}}\cdot 1=\frac{a\phi}{2}$; et vicissim in nihilum se vertente Semiaxe Ellipseos minore b, dat $\frac{a\phi}{2\sqrt{2}}\left(1-\frac{1.1}{4.4}-\frac{1.1.3.5}{4.4.8.8}-\frac{1.1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12.12}-\frac{1.1.3.5.7.9.11.13}{4.4.8.8.12.12.16.16}-\text{etc.}\right)$, ob $n=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=1$ quum $b=0$, et $\frac{c}{\sqrt{2}}$ =

T 2

$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Verum evanescentia Semiaxis *coniugati* Quadrantem Ellipticum vertit in a Semiaxem *transversum*. Ergo Series $1 - \frac{1.1}{2.2} - \frac{1.1.1.3}{2.2.4.4} - \frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6} - \frac{1.1.1.3.3.5.5.7}{2.2.4.4.6.6.8.8} - \text{etc.} = \frac{2}{\varphi}$. Quod confirmat demonstrationem a me alibi adlatam (353) huius elegantissimae, ac perinsignis Seriei. Eadem ratione, quum in casu $\tau\tilde{\omega}$ b evanescentis Series nuperrima Euleri verti debeat in a, evincitur esse $1 - \frac{1.1}{4.4} - \frac{1.1.3.5}{4.4.8.8} - \frac{1.1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12.12} - \frac{1.1.3.5.7.9.11.13}{4.4.8.8.12.12.16.16} - \text{etc.} = \frac{2\sqrt{2}}{\varphi}$. Exinde consequitur Quadrans Circularis Circumferentiae (cuius Radius sit 1) ita expressus per Seriem amoenissimam $\frac{\varphi}{2} = \frac{Q}{1} =$

$$\frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{1.1}{4.4} - \frac{1.1.3.5}{4.4.8.8} - \frac{1.1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12.12} - \frac{1.1.3.5.7.9.11.13}{4.4.8.8.12.12.16.16} - \text{etc.}}$$

; et Numerus Platonicus usque ab incunabulis Geometriae celeberrimus $\sqrt{2} =$

$$\frac{1 - \frac{1.1}{4.4} - \frac{1.1.3.5}{4.4.8.8} - \frac{1.1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12.12} - \frac{1.1.3.5.7.9.11.13}{4.4.8.8.12.12.16.16} - \text{etc.}}{1 - \frac{1.1}{2.2} - \frac{1.1.1.3}{2.2.4.4} - \frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6} - \frac{1.1.1.3.3.5.5.7}{2.2.4.4.6.6.8.8} - \text{etc.}}$$

; quae cuncta cum Wallisiana Serie, et additamentis Euleri mirum in modum conveniunt (354). Ceterum quae hactenus de Ellipseos conicae rectificatione sum commentatus non ad Malfatti tantummodo inventa in eorum sede locanda valde conferre censeo, sed argumentum etiam a Pascalio desumptum haud parum inlustrant, utpote Ellipsi praesertim innixum, accessionemque perhibent non inutilem tam §°. 9no., quam iis, quorum obiter in §°. 23^{io}. Lectorem monui haec Geometriae oblectamenta non aspernantem.

SECTIO



SECTIO III^a.

QVÆ OCCASIONE THEOREMATIS PASCALI VARIAS COMPLECTITVR ELEGANTIAS DOCTRINÆ CVRVARVM.

45. FORMULAM $\int X dx$ ad Curvarum quadraturam, vel ut Graeci aiebant τετραγωνισμὸν, pertinentem in Arcum Curvae, praxi magis idoneum, permutare celeberrimum Problema olim fuit ineunte hoc saeculo, palmamque, ni fallor, omnibus praeripuit in eo resolvendo Ioannes Bernoullius (355). In aperto autem est Curvarum ipsas perimetros etiam directe ad quadraturas reverti, sed quadraturas Superficierum ad Corpora aut Solida pertinentium, et universaliter Cylindricarum. Cuius rei exemplum exstat luculentissimum in Superficie Cylindri circularis *scaleni* iamdudum Geometrarum oculis obversata. Nam huius quadratura eadem est cum mensura perimetri Ellipseos conicae. Omniingis itaque Formulae $\int X dx$ a Sectionum Conicarum rectificatione dependentis constructio, non secus atque ab earum perimetris, ab areis parallelogrammatum Cylindricorum desumi poterit; hoc tamen ordine, ac lege, ut dum X Functio sit *rationalis*, constructio eadem consequatur aut a Parallelogrammis planis (nimirum *limitibus* idgenus Cylindrorum), aut a Parallelogrammis Cylindricis Parabolicis, aut a Parallelogrammis denique Cylindricis Circularibus (356), quemadmodum praeter alias sexcentas de Formula $\int \frac{(A + Bx)\,dx}{a + bx + cxx}$ praedicandum esset. Quum autem X formas induerit *irrationales*, quae nulla arte analytica *rationalitatem* acquirere possint, veluti illas ex. gr. a praecedente Sectione depromtas, et a Maclaurino, Riccato, Alemberto, atque Eulero longius promotas, Functionum omnium huiusemodi constructio vel ab areis Parallelo-

rallelogrammatων Cylindricorum Ellipticorum (quibus adnumerandae iure optimo sunt areae quoque Circularium, tam *rectorum*, quam *scalenorum*) vel ab areis Parallelogrammatων Cylindricorum Hyperbolicorum, uti foret ex. gr. $\int \frac{\sqrt{A+Bx}\,.\,dx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$ ex praeostensis (357). In hac universa Cylindrorum stirpe id unum potissimum animadvertendum est, quod Parabolicus Cylinder singulari prae aliis omnibus proprietate gaudeat, aut *rectus* aut *obliquus* fuerit, generandi Lineam semper Basi *similem* quomodolibet plano secetur, excepto casu plani ipsius per latera transeuntis. Quae proprietas meridiana luce clarius adparet semel ac memoria repetamus Cylindri Sectiones istas utcumque transversim genitas nihil aliud fore nisi Parabolas Apollonii, et huiuscemodi Parabolas sibi semper *similes* esse. Haec autem adfectio, nedum Cylindro Hyperbolico et Elliptico, quin etiam omnium simplicissimo Circulari denegata, locum quoque habet in Parallelogrammate plano universorum *limite* Cylindrorum.

46. Nec superiorem infirmare rectificationis Sectionum Conicarum Theoriam potis sunt quae subtiliter invenerunt summi equidem viri Leonardus Eulerus, et Ludovicus De-la-Grange, tam in Volumine I°. *Institutionum Calculi Integralis* (358), et in Voluminibus VI°. atque VII^mo. *Novorum Commentariorum* ac nuperrime in *Actis Academiae Scientiarum Petropolitanae* pro anno M.DCC.LXXVIII^vo. (359), quam in Tomo IV°. *Miscellaneorum Taurinensium* (360), de Aequatione differentiali

$$\frac{P\,dx}{\sqrt{A+2Bx+Cxx+2Dx^3+Ex^4}}=\frac{Q\,dy}{\sqrt{A'+2B'y+C'yy+2D'y^3+E'y^4}}$$

positis P, Q *rationalibus*, aut universalius $\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$ quibusdam *conditionibus* datis in Aequationem algebraicam inter x et y traducenda. Nam quamvis nonnullae prioris Aequationis oecumenicae species, veluti ex Maclaurino $\frac{\frac{1}{x^2}\,.\,dx}{\sqrt{\pm g^2 \pm fx^2 - x^4}}=\frac{\frac{1}{y^2}\,.\,dy}{\sqrt{\pm g'^2 \pm f'y^2 - y^4}}$, aut etiam $\frac{x^2\,.\,dx}{\sqrt{g^2 \pm fx^2 - x^4}}=\frac{y^2\,.\,dy}{\sqrt{g'^2 \pm f'y^2 - y^4}}$ (vid^ur. §^us. 42^dus.), nec non ex

Alem-

Alemberto $\frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2+cx^3}} = \frac{dy}{\sqrt{a'y+b'y^2+c'y^3}}$, seu

$$\frac{(a+bx)^{\rho}dx}{\sqrt{f+gx+hx^2\pm x^3}} = \frac{(a'+b'y)^{\rho'}dy}{\sqrt{f'+g'y+h'y^2\pm y^3}}, \text{ sive}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2+ex^3+fx^4}} = \frac{dy}{\sqrt{a'+b'y+c'y^2+e'y^3+f'y^4}} \quad (361),$$

ac tandem ex Eulero (362) $\frac{\frac{1}{x}.dx}{\sqrt{x(f+gx)(h+kx)}} = \frac{\frac{1}{y}.dy}{\sqrt{y(f'+g'y)(h'+k'y)}}$, ut ceteras Formulas praetermittam, earum *membra* obferant, quae separatim integrari nequeant nisi ope impetrata arcuum Sectionum Conicarum, nihil tamen obstat quominus variabiles x,y relationem aliquando algebraicam inter se habere possint. Aliquibus etenim substitutionibus factis Functionis algebraicae alterius variabilis y pro variabilium una x, atque ita comparatis, ut forma eadem maneat, solique *coëfficientes* discriminentur, nemo non videt quod enascatur Aequatio differentialis, cui satisfaciat relatio illa algebraica variabilium x, y, quae in substitutione adhibita fuit. Tota itaque res in idonea substitutione posita est, quae diversimode parari potest, et in coëfficientium obortis *conditionibus*. Hoc ut exemplis apte confirmetur, duo facillima seligam, unum ex Eulero (363), alterum ex Alemberto (364) depromptum. Si in $\frac{dx\sqrt{f+gxx}}{\sqrt{h+kxx}}$ substituatur $y=\sqrt{h+kxx}$, enascitur $\frac{dy\sqrt{(fk-gh)+gyy}}{\sqrt{-hk^2+k^2yy}}$. Instituta ergo Aequatione $\frac{dx\sqrt{f+gxx}}{\sqrt{h+kxx}} = \frac{dy\sqrt{(fk-gh)+gyy}}{\sqrt{-hk^2+k^2yy}}$ oritur procul dubio $y=\sqrt{h+kxx}$, sive potius $yy=h+kxx$; nimirum revertimur ad Aequationem eandem algebraicam, unde fuimus digressi. Quod, ne miraculo proximum videatur, ex

§.

§°. 44to. sic clariter explicabo. Hypothesi ad maiorem facilitatem revocata $\pi\ddot{\imath}\, fk < gh$, nemo non videt esse $\frac{dx\sqrt{f+gxx}}{\sqrt{h+kxx}}$ elementum Arcus Hyperbolae Conicae ad secundum Axem relatae, cuius Semiaxes sint *transversus* $\frac{\sqrt{gh-fk}}{\sqrt{k}}$, *coniugatus* $\sqrt{k}$, abscissae x a centro computatae in Axe secundo. Patet identidem $\frac{dy\sqrt{-(gh-fk)+gyy}}{\sqrt{-hk^2+k^2yy}}$ elementum esse Arcus alterius Hyperbolae conicae ad primum Axem relatae, cuius sint abscissae centrales y super Axem eundem, Semiaxis *transversus* $\sqrt{gh-fk}$, *coniugatus* $\sqrt{fk}$. Descriptis igitur hisce duabus Hyperbolis (Fig^a. 39.), erit quodlibet elementum Arcus prioris $BC = HI$ elemento posterioris, ideoque etiam totus Arcus $AC = GI$, et sic de ceteris in infinitum, dummodo KL, KM etc. $= x$, et KN, KO etc. $= y$ coordinatae fuerint tertiae Hyperbolae DEF eodem centro K praeditae, cuius Semiaxis *transversus* $\sqrt{h}$, *coniugatus* $\sqrt{\frac{h}{k}}$, atque Aequatio $y^2 = h + kx^2$ ad secundum Axem. Quibus positis Aequatio *data* differentialis $\frac{dx\sqrt{f+gxx}}{\sqrt{h+kxx}} = \frac{dy\sqrt{-(gh-fk)+gyy}}{\sqrt{-hk^2+k^2yy}}$, vel ad formam canonicam $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ redacta $\frac{dx}{\sqrt{\frac{h+kxx}{f+gxx}}} = \frac{dy}{\sqrt{\frac{-hk^2+k^2yy}{-(gh-fk)+gyy}}}$, in qua *coëfficientes* tam signis, quam magnitudine heic scriptam legem observent, si ab integratione *membrorum* dependeret *transcendens* esset, quippe duos Arcus aequales diversarum et *dissimilium* Hyperbolarum complectens. Veruntamen eius Aequationis ordo ac lex ad relationem algebraicam inter variabiles perducunt absque eo quod separatim *membra* integrare necesse sit, nimirum, ad *Locum* Hyperbolae conicae $y^2 - kx^2 - h = 0$; qua relatione innititur, et ob quam exsistit, neque aliter exsistere, nec vera esse unquam potest

test Aequatio *data* differentialis. Qui facillimum optaret, simulque nitidissimum huiusce argumenti specimen contemplari, centro R Hyperbolam sibi describat (Fig^a. 40.) aequilateram OVY; et vocatis Semiaxe *transverso*, ac *coniugato* a, b, et coordinatis $RS = x$, $RP = y$ consequetur gemina expressum forma idem elementum VY Hyperbolici Arcus OV, scilicet

ad secundum Axem $\dfrac{dx\sqrt{bb + \left(\frac{aa+bb}{bb}\right)xx}}{\sqrt{bb + xx}}$, atque

$\dfrac{dy\sqrt{-aa + \left(\frac{aa+bb}{aa}\right)yy}}{\sqrt{-aa + yy}}$ ad Axem primum. Semel ac ergo daretur

$$\text{Aequatio } \frac{dx\sqrt{bb + \left(\frac{aa+bb}{bb}\right)xx}}{\sqrt{cbb + cxx}} = \frac{dy\sqrt{-aa + \left(\frac{aa+bb}{aa}\right)yy}}{\sqrt{-caa + cyy}},$$

quae *casus* est admodum singularis Aequationis *oecumenicae* comparatae

$$\frac{dx\sqrt{f + gxx}}{\sqrt{h + kxx}} = \frac{dy\sqrt{f' + g'yy}}{\sqrt{h' + k'yy}}, \text{ sive } \frac{dx}{\sqrt{\frac{h+kxx}{f+gxx}}} = \frac{dy}{\sqrt{\frac{h'+k'yy}{f'+g'yy}}},$$

nullus dubito quin satis constet eo perducere Aequationem illam differentialem propositam, ut nihil aliud significet praeter *Locum* Hyperbolicum, a quo nata est, nimirum Aequationem aut relationem duarum variabilium secundi ordinis $b^2y^2 - a^2x^2 - a^2b^2 = 0$. Hic autem *casus* a praecedente universaliori non differt nisi quia tres illae Hyperbolae in unam eandemque coalescant. Ad Alembertum nunc venio, qui quum

$\dfrac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{xx \pm fx - bb}}$ elementum Arcus Hyperbolici, per ea quae ex Pascalio fusius demonstravi in Sectione II^a., in Elementum aliud Hyperbolici Arcus vertere statuisset, ingeniosa substitutione usus est $x = \dfrac{qy - q}{y - q}$, sive relatione inter variabiles x, y, quae in Aequationem $(x - q)y - qx + q = 0$ Hyperbolae ad asymptotas relatae facile evolvitur. Omnis vero Auctoris praestantissimi labor innititur Theoremate, quod ante illum et

V Riccatus

Riccatus et Eulerus invenerant (365), $xd\left(\frac{\sqrt{pxx-q}}{\sqrt{rxx-s}}\right)+$ $dx\left(\frac{\sqrt{pxx-q}}{\sqrt{rxx-s}}\right)=d(xz)=dx\left(\frac{\sqrt{pxx-q}}{\sqrt{rxx-s}}\right)+dz\left(\frac{\sqrt{szz-q}}{\sqrt{rzz-p}}\right)$, dummodo sit $z=\frac{\sqrt{pxx-q}}{\sqrt{rxx-s}}$. Aequatio igitur $xd\left(\frac{\sqrt{pxx-q}}{\sqrt{rxx-s}}\right)=$ $dy\left(\frac{\sqrt{syy-q}}{\sqrt{ryy-p}}\right)$, vel in forma *canonica*, factis $\frac{\sqrt{ryy-p}}{\sqrt{syy-q}}=\sqrt{Y}$, et $\frac{\sqrt{pxx-q}}{\sqrt{rxx-s}}=\sqrt{X}$, $d\sqrt{X}=\frac{dX}{\sqrt{4X}}=\frac{X'dx}{\sqrt{4X}}=\frac{dx}{\sqrt{\frac{4X}{X'^2}}}$, ac demum $\frac{xdx}{\sqrt{\frac{4X}{X'^2}}}=\frac{dx}{\sqrt{\frac{4X}{x^2X'^2}}}=\frac{dx}{\sqrt{X''}}$, Aequatio differentialis $\frac{dx}{\sqrt{X''}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$, cuius *coëfficientes* datis *conditionibus* satisfaciant, eadem erit atque Aequatio algebraica $rx^2y^2-sy^2-px^2+q=0$, tametsi duo illius *membra* sint *transcendentia*, et ideo respuant algebraicam integrationem. Nam per Tabulam §i. 44ii. primum Aequationis ipsius *membrum* (si summaretur) est differentia inter Lineam rectam atque Arcum conicae Curvae, nimirum $xy-\int\frac{dx\sqrt{pxx-q}}{\sqrt{rxx-s}}$, secundum autem est Arcus alterius Lineae Conicae *cognominis* $\int\frac{dy\sqrt{syy-q}}{\sqrt{ryy-p}}$; variabilesque x, y ita invicem connectantur, ut Coordinatae sint illius Curvae, quam supra obiter memoravi. Quibus rite intellectis, et in succum ac sanguinem versis via sternitur ad maiora.

47. Eam vero Lineam ordinis 4ii., vel universalius $x^2y^2+ay^2+bx^2+c=0$ maximi habendam arbitror, propterea quod ab ipsius areae dimensione rectificatio Conicarum procedat. Dum etenim rursus in censum veniat Formula oecumenica $\frac{dx\sqrt{f+gxx}}{\sqrt{p+qxx}}$, atque fiat $y=\frac{\sqrt{f+gxx}}{\sqrt{p+qxx}}$ sive

sive $x^2 y^2 + \frac{p}{q} y^2 - \frac{g}{q} x^2 - \frac{f}{q} = 0$, procul dubio erit $\int y\,dx = \int \frac{dx\sqrt{f + gxx}}{\sqrt{p + qxx}}$, signis, uti par est, haudquaquam animadversis. Nec remittitur ordo Lineae si prae Formulis Eulerianis eas Alemberti potius adhibendas aliquis expostulaverit. Hae quippe Formulae unica innituntur $\frac{dx\sqrt{fx}}{\sqrt{gxx + px + q}}$ ita, ut consequatur $\int y dx = \int \frac{dx\sqrt{fx}}{\sqrt{gxx + px + q}}$ statim ac y fuerit ordinata ad Lineam aequatione quarti gradus praeditam $x^2 y^2 + \frac{p}{g} xy^2 + \frac{q}{g} y^2 - \frac{f}{g} x = 0$. Quinimo nequidem revocatis Formulis simplicioribus, quas praebuit in §°. 34to. doctrina Pascalii, quidpiam ordini Curvae detrahi posse Algebra docet. Namque primitiva illa Formula est $\int \frac{dx\sqrt{bx \mp a}}{\sqrt{\pm x^2 \mp c}}$, aut signis reiectis $\int \frac{dx\sqrt{bx + a}}{\sqrt{x^2 + c}} = \int y dx$ toties quoties $x^2 y^2 + cy^2 - bx - a = 0$. Haec mihi iampridem meditanti occurrit excogitandum quanam de caussa Alembertus in III^a. *Disquisitionum* suarum *Parte* de Calculo Integralium promovendo, usque ab anno M.DCC.XLVIII°. (366) dicaverit Academiae Scientiarum Berolinensi elaboratum valde, egregiumque commentarium in eas Formulas determinandas, quarum integratio ab Arcubus simul dependeat Sectionum Conicarum et Arearum quadratura Lineae 3^{ii}. ordinis (367), oblitus fortasse, aut invisus *Quadraturam* Lineae ordinis tertii simplicius esse Problema prae *Rectificatione* Conicarum, vel Quadratura Linearum ordinis quarti. Et re quidem vera Alembertus idem in *Opusculorum Mathematicorum* Volumine V^{to}. (368) quum ipsam antiquiorem investigationem novis inventis locupletiorem facere cordi habuisset, Analystas moerente ferme animo admonet hactenus non potuisse τὸ $\int \frac{dx}{x\sqrt{P + Qx + Sx^2 + Rx^3}}$ praesidio Arcuum Conicarum integrare, quamvis amplissime ostenderit Formulam ipsam facile integrari ope Areae a Linea 3^{ii}. ordinis comprehensae (369), perinde ac si Analyseos leges neque inversae, nec perturbatae fuissent quodammodo quadraturam Lineae ordinis inferioris illi superioris ordinis posthabendo. Quidquid autem

 hoc

hoc sit, Quadratura illius Curvae, cuius Aequatio quaternis terminis constat $x^2y^2 + \frac{p}{q}y^2 - \frac{g}{q}x^2 - \frac{f}{q} = 0$, in eosdem adamussim *casus* distribui poterit, quos complectitur Tabula §i. 44i. Quod ne molestius, quam par esset, Geometrarum oculis subiiceretur, curavi Aequationem ipsam Lexelliano

Area Lineae 4i. ordinis $\pm nx^2y^2 \pm y^2 =$		
Dum − + + +	universaliter	Arcus
− + − +	$n > m$	Arcus
+ + + −	universaliter	Arcus
+ − + −	$n > m$	Arcus
+ + + +	$n < m$	Arcus
+ − + −	$n < m$	Arcus
− + + −	$n < m$	Arcus
− + − +	$n < m$	Arcus
+ − + +	universaliter	Arcus
+ − − +	$n > m$	Arcus
+ + − +	universaliter	Arcus
+ + + +	$n > m$	Arcus
Praetermissae signorum combinationes aut eodem		

liano more tractare, nimirum supponendo $f = p = 1$, $g = m$, $q = n$, ut simpliciorem formam *quadrinomialem* acquireret $\pm nx^2 y^2 \pm y^2 = \pm mx^2 \pm 1$. Tabulam heic promissam subiungo, quam fusius explicandam supervacaneum fore nemo non videt, quum nitidiores aliquot *casus* suppeditet in Elementis iam contemplatos, ac praesertim a Bougainvillio (370).

$\pm mx^2 \pm 1$ obtinetur a *rectificatione*

Elliptici .	Ex mea Tabula .	I.
Elliptici .		II.
Elliptici .		XI.
Elliptici .		VI.
Hyperbolici .		III.
Hyperbolici .		IV.
Hyperbolici .		VIII.
Hyperbolici .		IX.
Elliptici et Hyperbolici simul .		V.
Elliptici et Hyperbolici simul .		VII.
Elliptici et Hyperbolici simul .		X.
Elliptici et Hyperbolici simul .		XII.

recidunt, aut Curvam reddunt *imaginariam*.

48. Nonnullas Curvarum harumce adfectiones, quae veluti sponte mihi se obferunt, iniuria quidem silentio praeteritas aliquis redargueret. Namque nec peregrinum, nec salebrosum est illud eas semper Lineas (dum reales fuerint) ex quatuor ramis constare similibus et aequalibus circa duos coordinatarum Axes dispositis (quod ipsum comprobat earundem *quadratura*, quum arcus Elliptici et Hyperbolici tam positivi, quam negativi sint eâdem abscissa manente), alterumve ipsarum ramos esse in infinitum porrectos circa Axem et e regione *τῶν x* iis tantum *casibus*, qui numeris Tabulae adpositis distinguuntur XI°. VI°. III^{io}. IV°. V°. XII^{mo}., esse autem in infinitum productos circa alium Axem et e regione *τῶν y* iis *casibus*, quibus respondent numeri I^{us}. II^{us}. VIII^{us}. IX^{us}. V^{us}. VI^{us}. IV^{us}. Exinde consequitur Aequationis illius *casus* ternos IV^{um}. V^{um}. ac VI^{um}. Curvas exhibere octo infinitis ramis compositas, nimirum, quatuor e regione x, ac totidem e regione y instar Hyperbolae geminatae Apollonianae $nx^2y^2 = 1$, quae singularissimus *casus* est Aequationis eiusdem statim atque in *casu* V^{to}. secundus ac tertius terminus evanuerint. Illae demum Curvae ad reliquos binos numeros pertinentes VII^{um}. ac X^{um}. ramis carent infinitis, hoc tamen discrimine, quod Curva *casus* X^{i}. in Ovalem unicam se componat, dum e contra Linea *casus* VII^{i}. duabus coalescat Ovalibus coniugatis a centro aequidistantibus, aequalibus, similibus, et similiter positis. Asymptotae vel Axes ipsimet sunt, vel Rectae finito intervallo distantes et Axibus parallelae; earum etiam infinitis ramis gaudentium aliquae separatis partibus constant, ceterae in puncto intersectionis Axium, quod universaliter est Centrum Curvae, ramis omnibus connectuntur; Lineaeque quaedam infinitis praeditae ramis circum Axem *τῶν x* nunc ei concavitatem, nunc ex adverso convexitatem obvertendo, Rectam geminam habent veluti *limitem* Hyperbolicorum horumce ramorum $nx^2y^2 = mx^2$, sive $y = \pm\sqrt{\frac{m}{n}}$ in Aequatione generali comprehensam. Sed iterum iterumque profiteor inania haec esse ac futilia post Curvarum theoriam a tot tantisque viris excultam, et Newtono potissimum, Bragelongnio, Leonardo Eulero, ac Gabriele Cramero (371); adeo ut a meis veteribus collectaneis transcripta fideliter ne novo quidem examini subiicere, neque errores aliquot, si forte irrepserint ea tempestate, nunc emen-

emendare curaverim. Ceterum quibusnam casibus Curvae Area a Circuli arcu aut ab arcu Parabolae conicae consequatur, quibusnam aliis geometricae *quadraturae* sit capax, post dicta in §°. 44to., et Aequationis naturam indolemque perspectam quaestio est currente calamo dirimenda. Si Aequationem spectes completam, nunquam id contingere posse videbis: si mutilam, unoque tantum termino carentem, aut ob $n=0$ termino caret sublimiori, et eo *casu* Linea duobus gradibus remittitur ac in Circulum vertitur, vel Hyperbolam Apollonianam, nullusque hoc aevo dubium movet de Circuli, aut Hyperbolae area a Circularibus, vel Parabolicis arcubus derivanda; sive demum propter $m=0$ tertius terminus deest, abeunte Aequatione in *trinomialem* ordinis 4^{ti}. $-nx^2y^2+y^2=1$, tumque ipsius Area ab arcu Circuli dependebit, quemadmodum inferius ostendam. Unicae, quae in *trinomialibus* huiuscemodi quadraturam non respuant geometricam, Aequatione distinguuntur $\pm nx^2y^2\pm y^2=\pm mx^2$, quarum deinceps meminisse iuvabit. Veruntamen, undenam fiat quod Curva perfectam completamque Aequationem *quadrinomialem* induens nusquam possit area potiri, quae ab arcu Circuli vel Ellipseos potius aequilaterae mensuram recipiat, tametsi possit ex demonstratis in §^{s}. 44°. ab arcu aequilaterae Hyperbolae, alii quaerant meticulose, mysteriumque dictitent Geometriae. Meo quidem iudicio nodum solvit *comparabilis* origo illa, quam praebui in §°. 24to., elementorum arcus Hyperbolae aequilaterae et Circuli: nam virum decet mathematicum religiose, sancteque colere veritatem, sed nunquam effictis miraculis fabulisque inquinare. Adnumerandam potius existimo aliis proprietatibus universalibus eiusdem Lineae 4^i. ordinis in Tabula contemplatae illam quammaxime elegantem, rotundum nempe Solidum a Linea ipsa genitum revolutione circum Axem τῶν x, et a Functione expressum $\frac{rc}{2}\int dx\,\frac{f+gxx}{p+qxx}$, in Cylindrum circularem facile converti posse per *quadraturam* Conicarum Sectionum (Circulo etiam ac Linea recta subintellectis); quod egregie consonat Lineis, quarum Areae a *rectificatione* earundem Sectionum, uti ostendimus, consequuntur.

49. Primus omnium, ni fallor, Alexis Clairautius (adhuc puer duodecim annorum supra dimidium, id testantibus triumviris Academiae Parisiensis

risiensis Scientiarum Fontenellio, Nicolio, ac Pitoto (372), annumque M.DCC.XXVI[um]. statuentibus (373)) in Volumine IV°. vel Continuatione III[ia]. *Miscellaneorum Berolinensium*, edita vertente anno M.DCC.XXXIV°., de Curva loquutus fuit $a^4 = a^2x^2 - x^2y^2$ (374), quae ipsamet est $1 = y^2 - nx^2y^2$ superius descripta, dummodo coordinatae x, y permutentur, et vice a^4 in priore subeat generalius $a^2\ b^2$, et $\frac{b^2}{n}$ alterius idem sit cum a^2. Enascitur ista Linea statim ac in Pascalii Formula §[i]. 25[ti]., quae perducit ad rectificationem Ellipseos conicae, ubi $y = \frac{a\sqrt{a^2+c^2-2cx}}{\sqrt{a^2-x^2}}$, fiat $c = 0$, subeatque pro Ellipsi *scalena* Ellipsis aequilatera aut Circulus. Clairautii Lineam, sed Aequatione praeditam universaliori $a^2b^2 = a^2y^2 - x^2y^2$, nuncupare soleo Hyperbolam Circuli, propterea quod veluti ordinatae ad Hyperbolam Apollonii proportionem servant inversam ordinatis ad Rectam $\left(y = \frac{ab}{x}\right)$ (375), non secus atque *Hyperbolismi* quatuor Hyperboles, bini Paraboles, ac terni Ellipseos a Newtono animadversi in sua *Enumeratione Linearum tertii ordinis* Londini edita anno M.DCC.IV°. (§° IV. num. 9. 10. 11.), ita in ea Curva sit $y = \frac{ab}{\sqrt{a^2-x^2}}$, scilicet ordinatae sint reciproce proportionales ordinatis in Circulo. Trigonometrice inspecta eadem Curva nihil aliud est nisi Linea, cuius abscissae x *sinus* sint, ordinatae autem y *secantes* ipsius Circuli arcus si $b = a$, aut *secantibus* proportionales in ratione $b : a$. Exinde oritur area ipsius Curvae $\int y dx = \int \frac{a^2 d(Sin\ \varphi).b}{a(Cos.\ \varphi)} = ab\varphi$, et in casu τῶ $b = a$, quo Curva aequilatera dici meretur, $= a^2\varphi$, videlicet dupla Sectoris Circuli generatoris inscripti. Hoc etiam aliter ac synthetico more derivatur a Figurae inspectione 41[mae]., qua Curva pingitur quatuor ramis conflata Hyperbolicis e regione τῶν y, eoquod singularem *casum* constituat ad I[um]. II[um], ac IX[um]. universalis Tabulae pertinentem (376). Nam si parameter Curvae $b = a$, liquet ex Lineae genesi, quae duabus partibus aequalibus et similibus *EAD*, *GCF*, uti Hyperbola Apolloniana, composita est, inter se dissitis

per

per intervallum in Axe τῶν x aequale diametro Circuli generatoris $= AC = 2a$, quod intervallum $= HI = 2a$ segregat etiam duas rectas Curvae eiusdem asymptotas Axi parallelas *XHV*, *TIZ*, fore $SK:BK = LK$ aut $RS:KM::BK:OS$, et idcirco elementum areae asymptoticae $RSOP = 2BMK$, quemadmodum supra. Quadrans igitur areae, tametsi altitudinis infinitae, *ABΠD* duplum peraequat inscripti Quadrantis Circuli *AKIB*, totaque infinite longa area *TDAEXHVGCFZIΓ* duplum Circuli inscripti *AHCIB* eodem Curvae centro gaudentis. Id si Evangelista Torricellius vidisset, inter nostrates anteacti saeculi Geometras (pace dixerim Vincentii Viviani (377)) facile princeps, nec Solidum suum infinite-longum *Hyperbolicum acutum* tot tantisque laudibus extulisset (378), quod inventum paulo postea uno pene calami ductu Bonaventura Cavalerius in immensum adauxit (379), nec procul dubio mirabilem analogiam inter Solidum ipsum Areamque illius Curvae silentio praeteriisset. Ut enim in Solido illo ab Hyperbolae aequilaterae circum asymptoton rotatione genito quaelibet illius pars a quadrilineo infinite longo producta par est duplo subiacentis et inscripti Cylindri, non secus etiam quodvis Areae nostrae infinite-longae quadrilineum *ABSO* adaequat bis sumptum atque inscriptum subiacentem Sectorem *ABK*. Quemadmodum in Solido illo Torricelliano praedictus Cylinder suprema sua basi eius capacitatem bifariam secat, ita Quadrans Circuli circumferentiae *AKI* in duas dividit aequales partes aream asymptoticam *ABΠD*; Hemiperipheria *HAI* aream *DAEXHBIΓ*, et Peripheria integra *IAHC* totam aream *TDAEXHVGCFZIΓ* bifariam secant. Eodem pariter modo, quo Solidum Hyperbolicum in frusta aequalia dividitur quotlibuerit si Radius baseos in totidem aequales partes dividatur, aut, si velis, in quavis *data* ratione secatur secto proportionaliter eodem Radio, sic area nostra infinite longa easdem patitur divisiones secando in partes aequales, aut proportionaliter Arcum Quadrantis *AKI* vice Radii *BI*, veluti in Figura adumbravi. Eâdem ratione analogiam quoque servat ipsamet Area cum ea infinite-longa Logarithmicae Curvae relatae ad Asymptotam, propterea quod haec Area postrema Solidumque acutum Hyperbolicum Frusta simul habent proportionalia Ordinatae extremae segmentis, Torricellio ipso utrumque prae omnibus demonstrante (MS. Palat. in *Hemihyperbola*). Scalenae autem Curvae post aequilateram inlustratam explicationis vix egent. Vel enim circumscriptae dum Para-

 meter

meter $BY = b < BA = a$, vel inscriptae in aequilatera fuerint dum Parameter $B\Delta = b > BA = a$, iisdem parallelis asymptotis TIZ, XHV stringitur universa haec Curvarum innumerarum familia, adeo ut et communibus asymptotis gaudeant, et asymptoticae sint inter se non secus ac Hyperbolae conicae *similes*. Quo magis minuitur Curvae Parameter BY, eo magis illius rami expanduntur usque dum b evanescente abeant in Diametrum IBH, duoque vertices cum centro B confundantur; et e contra quo magis augescit Parameter $B\Delta$, eo magis eius Lineae rami contrahuntur usque dum b infinito evadente tota Curva in infinito se abscondat. Hos inter geminos Curvae limites et Areae partes, et Areae integrae aequantur duplis Ellipseos conicae inscriptae subiacentibus Sectoribus, aut duplis integrarum Ellipsium, quae Ellipses (facile in Circulos convertendae Radios habentes $\sqrt{ab}$ ex Conicorum doctrina, aut medios geometrice proportionales inter constantem Radium BI ac Parametrum Curvae) Semiaxem unum semper habeant constantem $BI = a$, alterum vero BY, $B\Delta$ etc. $= b$, nimirum distantiam verticis a centro communi Curvarum omnium, sive semidistantiam duarum partium Curvae *coniugatarum*. Revera, quum ex praemissis quaelibet ordinatarum Curvae scalenae $S\Phi$ aut $S\Upsilon$ sit ad SO respondentem aequilaterae in ratione *data* $BY:BA$ aut $B\Delta : BA$, nempe ex Conicis uti Sector Ellipseos BYQ aut $B\Delta\Phi$ ad Sectorem Circuli BAK, sive ut eorum dupla, nemo de veritate Theorematis elegantissimi dubitare unquam poterit. Quinimo et valde admirari debemus in Curvis istis amplissimam Geometriae catechesin tam in areis Curvarum *scalenarum* perfectam nihilominus servantibus analogiam cum Solido Hyperbolico acuto ab Hyperbolis pariter *scalenis* generato, quam in adstruendis nitideque explicandis huius Lineae praesidio variis gradibus Infinitorum, et Infinite-parvorum, de quibus hucusque fastidiosa, ac saepius a veritate absona Mathematici protulerunt (380). Primus ego, quod sciam, in Prolegomenis *Theoriae Magnitudinum Exponentialium* etc. ostendi (381) Solida Hyperbolica acuta basibus conicis praedita dupla etiam esse subiacentium inscriptorum Corporum a revolutione Parallelogrammatis obliquanguli genitorum, et in partes aequales quotcunque, aut in *data* proportione secari quoties in easdem numero partes, aut in eâdem proportione secetur latus conicae baseos. Non diversimode Area Curvae, quam tracto, dupla est Sectoris inscripti subiacentis Ellipseos, dividiturque aut aequaliter aut inaequaliter

uti

uti libuerit, dum ita secetur Sector Ellipticus, vel, quod in idem recidit, Sector aut Arcus Circuli circumscripti. In extremo Curvarum *limite*, quo Parameter $B\Delta = \infty$, asymptota $IT = \frac{ab}{o} = \frac{a.\infty}{o}$ non potest quin infinities infinitae sit longitudinis: in altero extremo *limite*, quo et Curva et Ellipsis inscripta formam induunt Lineae rectae *IBH* propter Parametrum $b = o$, asymptota quoque in nihilum abit; sed utpote $= \frac{a.o}{o}$, nihil obstat quominus τὸ o Asymptoton ad o Parametron proportionem habeat infinite magnam $a : \sqrt{a^2 - x^2} = a : o$. Itaque in recta *TIZ*, suaque comite *XHV*, Infinita, nimirum extremae ordinatae, rationes omnes possibiles exhauriunt inter se a maxima ad minimam, quemadmodum Curvarum omnium Parametri. Veruntamen rationes istae τῶ $\infty' : \infty$, sive $o' : o$ neque haec Infinita, neque has Nullitates prouti exsistentes, sed prouti exsistentium magnitudinum *limites*, ultimasque Finitorum proportiones Geometrarum oculis obiiciant necesse est. Nam eadem symptomata nobis obferunt in Elementis non modo asymptotae communes innumeris *similibus* Hyperbolis conicis, quin etiam Circulus ipse Euclideo more versatus (382). Eapropter quod Alembertus ingeniose quidem in *Opusculorum Mathematicorum* Volumine VI°.. typis excuso vertente anno M.DCC.LXXIII°. (383), de Logarithmica disseruit *ABC'* (Fig. 42.) eandem cum Hyperbola Apolloniana *DCE* asymptotam habente *FGI*, nec novum esse iudico, nec calculi indigere, neque ab iam dictis discriminari. Neminem etenim latet inscripto in Hyperbola quadrato *CGFB*, ordinatas Logisticae *YM*, *XK* etc. ductas in constantem $CB = FB$ Subtangentem eiusdem Curvae Hyperbolicas semper areas *CBYL*, *CBXH* etc. peraequare. Hoc primus docuit Iacobus Bernoullius (384), quamvis hanc Curvae transcendentis generationem innuens nec Logarithmicam fuisse persenserit (385), nec eius continuationem veram cognoverit, quam censuit *BPQ*, perinde ac si *regressu* in *B* praedita foret, oblitus spatia *CBZR*, *CBΔS* etc. negativa fieri, ideoque negativas etiam ordinatas *ZT*, *ΔV* etc. vice positivarum *ZP*, *ΔQ* etc., et ramum *BPQ* in inversum *BTVC'* flecti debere. Nam ob inventum Robervallii, cuius gloria vulgo tribuitur Iesuitae Gregorio a Sancto Vincentio (386), *YM*, *XK* etc. arithmetice crescunt *YL*, *XH* etc. crescentibus geometrice, aut *FY*, *FX* etc. geometrice decrescentibus. Est autem *LY* : *MY*

ex ista Curvae generatione $::F\Omega\Upsilon B:BYLC$, ac similiter $HX:KX::FT\Phi B:BXHC$ etc. Igitur quum haec ratio ex natura Hyperbolae ad asymptotam relatae, quo punctum H remotius fuerit, semper augeatur sine limite in infinitum versus Σ, Λ, erit tandem asymptota Hyperbolae ΘF ad asymptotam Logarithmicae IF veluti $\infty:1$, nimirum erit asymptotarum postrema Infinitum, quod vocant *paradoxum* (387), et extremum in Hyperbola rectangulum inscriptum $\Sigma\Theta F$, sive BC^2, ad extremum alterum in Logarithmica $IA.IF$ uti $\infty:1$, quemadmodum Alemberto placuit. Illud tamen prae omnibus in Clairautii Linea oblectamento maximo mihi fuit, quod ea duce detexerim mensuram Superficiei Solidi rotundi a revolutione geniti cuiuslibet Segmenti circularis $ICAB$ circum Chordam IB (Fig^a. 43). Ducto etenim radio XVA ad Chordam IB perpendiculari, protractoque usquedum $VN = XA$, sive $AN = XV$, emissisque quotlibuerit radiis XD, XC, XO etc., et ad IB normalibus Dy, $C\delta$, OQ etc., istae adeo producantur in L, K, H etc., ut sint $Ly = DT$, $K\delta = CS$, $HQ = OR$ etc. Ex notissimo Geometriae Theoremate erit Area Curvae sic genitae $IHKLAV$ ad Superficiem hemisolidi a Semisegmento geniti $IOCDAV$ veluti Quadratum Radii ad duplam Circuli sui Superficiem (388). Atqui Curva descripta eadem est cum illa Clairautii superius considerata. Nam si referatur ad Axem $N\Upsilon$ normalem rectae XN, habebitur $AN = VX$, $GL = Gy - yL = DX - DT = TX$, pariterque $FK = SX$, $EH = RX$, ac tandem $IM =$ radio IX; scilicet habebuntur ordinatae $GL = TX = \frac{NA.AX}{D\Gamma}$, $FK = \frac{NA.AX}{C\Pi}$, et sic de ceteris in infinitum: quod non tantum Hyperbolam Circuli denotat, verum etiam facillimam huius Lineae, quae Parametrum *datam* quamcumque habeat AN, Asymptotamque $\Upsilon T\Delta$ e regione Φ, descriptionem aut constructionem *graphicam* detegit ope rectarum ab extremo *hypothenusae* puncto X ad oppositum latus IV emissarum. Area vero $ALKHIMNA$ demonstrata iam est aequalis $\frac{XV}{XA}$. a Sect. $XADCOIX$. Igitur Area $VALKHIV = XA.IV - \frac{XV}{XA}.XA.ICA = XA.IV - XV.ICA = XV.PA - XV.ICA$ (si tangens ducatur arcus genitoris ACI) $= (PA - ICA)XV$. Quamobrem reperta Linea recta, quae media sit geometrica proportio-

portionalis inter Differentiam Tangentis Arcus genitoris ab ipso Arcu, et Distantiam VX Chordae eiusdem Arcus a centro Circuli, Superficies Semisolidi dupla erit areae Circuli *media* illa veluti Radio descripti; et integra Solidi Superficies ipsius Circuli quadrupla erit, quemadmodum de integra Sphaerae Superficie relata ad Aream Circuli maximi Archimedes invenit. Archimedis profecto theoria unus, atque facillimus, et singularis *casus* est superioris doctrinae, in supplementum Geometrae Siculi iamdudum a me inventis additae Torricellii, Hugenii, Parenti, aliorumque (389), exeoquod Arcu ACI converso in Quadrantem $ACIY$, fit $XV = 0$, ac Tangens $PA = \frac{XA^2}{0} = \infty$, et idcirco $(PA - ICA)\,XV = \left(\frac{XA^2}{0} - YCA\right)0 = \frac{XA^2}{0} \cdot 0 = XA^2$, nempe Superficies Hemisphaerica dupla Circuli maximi, et Sphaerica eiusdem Circuli quadrupla (390). Eadem nova theoria fundamentum est quoque dimensionis a me alibi traditae (391) Tholi illius in Architectura medii aevi, et Germanorum re aedificatoria praestantissimi (392), quem Itali vulgo nuncupant *a sesto-acuto*, Galli *en tiers-point*, vel *ogive*, *augive*, ex Germanico verbo *aug* (ocil), minusque docti Gothicum adpellare sueverant.

50. Aliae Clairautii Lineae ab eo animadversae in usum Deliaci Problematis nec minorem elegantiam obferunt, nec minus idoneae sunt Geometriae promovendae. Hasce etenim Curvas dum longo tempore elapso Lineis illis compararem, quae a Carolo Renaldino *Mediceae* dictae fuerunt in Opere Patavii edito anno M.DC.LXX^{mo}., cui titulum fecit *Geometra promotus* (393), non potui quin Clairautium impuberem Renaldino admodum seni, et primum in Pisana, deinde in Patavina Academia Antecessori (394). praeferrem. Süis iste *novis* Lineis, et Mediceae stirpis regali tessera decoratis, adnumerat sine nomine tam eam aequatione distinctam $x^2 \pm bx = y^2$, nimirum Hyperbolam conicam aequilateram vetustissimam, quam aliam $bx - x^2 = y^2$, videlicet Circulum. Reliqua perlegenti Horatianum illud facile occurrit *Quid dignum tanto feret hic promissor hiatu?* Oh! quam impar Renaldini labor prae ingeniosissimis Curvis ante ipsum, scilicet anno M.DC.LIV°. a Christiano Hugenio contemplatis in Opusculo cedro digno, cui titulum fecit *Illustrium quorundam Problematum constructiones*! Linearum Clairautii prima, quam *medianam Parabolicam* auctor ipse vocavit, suppeditatur ab Aequatione $x^4 - a^2x^2 - a^2y^2 = 0$, in signo tan-

tum

tum postremi termini discrepante ab Aequatione simplicissimi Bifolii in §°. 41mo. contemplati $x^4 - a^2x^2 + a^2y^2 = 0$. Singularis huiusce Lineae proprietas est, non equidem aspernanda, quod si orthogonalium coordinatarum vice referatur ad eius Centrum veluti *focum* ope radiorum z, et angulorum φ ad Axem τῶν x, unde Aequatio *data* vertatur in $z = \frac{\pm a}{(Cos.\ \varphi)^2}$, haec analogiam eloquentem satis praeseferat, intimumque foedus cum mea Lemniscata, illâque notissima Bernoulliorum. Dum enim Lemniscatarum prior ex §°. 41mo. distinguitur Aequatione $z = \frac{\pm a\sqrt{Cos.\ 2\varphi}}{(Cos.\ \varphi)^2}$, ac Bernoulliana solo *numeratore* contenta Aequationem habet $z = \pm a\sqrt{Cos.\ 2\varphi}$, Linea Clairautii vicissim *denominatorem* unicum eligit, et Aequatione fruitur $z = \frac{\pm a}{(Cos.\ \varphi)^2}$, quemadmodum innui. Cognationem quoque ipsius Curvae, ac Lineae rectae Aequatio eadem ostendit; propterea quod, ut norunt omnes, Recta, vel potius duarum Parallelarum Rectarum Systema intervallo $2a$ dissitarum exprimatur hac Aequatione $z = \frac{\pm a}{Cos.\ \varphi}$, non secus atque in spatio finito duo tantum indicat puncta *coniugata*, et per idem intervallum $2a$ distantia, altera extremi gradus *rationalis* Aequatio $z = \frac{\pm a}{(Cos.\ \varphi)^\infty}$. A prima autem Aequatione perquam faciliter Theorema eximium illud ostenditur, nempe $\int \frac{d\varphi}{(Cos.\ \varphi)^2} = Tang.\ \varphi$, quod praesidio Infinite-parvorum Analyseos hactenus fuit demonstratum (395). Nam $\frac{a}{Cos.\ \varphi}$, vel $a.\ Sec.\ \varphi$ est Hypothenusa Trianguli variabilis orthogonii, cuius altitudo constans a: igitur eius Areae elementum $\frac{a^2.\,d\varphi}{2(Cos.\ \varphi)^2}$ dum ex Euclide isthuc ipsum elementum $= \frac{a^2 d\ Tang.\ \varphi}{2}$, prouti Figura 71^a. patefacit. Depressa Aequatione

illa

illa Trigonometrica ad Rectam Lineam $z = \frac{\pm a}{Cos.\ \varphi}$, oculis statim subiicitur altera Trigonometrica *irrationalis* $z = \frac{\pm a}{\sqrt{Cos.\ \varphi}}$, quae ad secundam pertinet Clairautii Lineam, seu *medianam Hyperbolicam*, cuius Aequatio more solito concinnata $x^4 + x^2y^2 - a^4 = 0$. Paradoxorum amatores Analysin heic repugnantem, et in contraria ducentem fortasse crederent, quum Aequatio more solito expressa $x^4 + x^2y^2 - a^4 = 0$ quatuor ramos suppeditet, nempe $\sqrt{x^2+y^2} = z$ realis valoris quomodolibet Radius z Axibus inclinetur, dum e contra Trigonometrica $z = \frac{\pm a}{\sqrt{Cos.\ \varphi}}$ obferat z *imaginarium* posito $Cos.\ \varphi$ negativo. Veruntamen primitiva, et numeris omnibus absoluta Aequatio quum sit $z^4 = \frac{a^4}{(Cos.\ \varphi)^2}$, erit z tam $= \pm \frac{a}{\sqrt{Cos.\ \varphi}}$, quam $= \frac{\pm a\sqrt{-1}}{\sqrt{Cos.\ \varphi}}$. Postrema Formula in hypothesi τῶ $Cos.\ \varphi$ negativi realem habet valorem, et nodum solvit; sed prima nihilominus recte perpensa quatuor sufficit Curvae ramis describendis, alteramque penitus inutilem esse decernit. Aream huius Curvae quaerere, quam Clairautius ea tempestate ignoraverat, ludicrum potius, quam serium molimentum esse patebit. Profecto huius Lineae asymptoticae, et quatuor ramis compositae similibus et aequalibus (Fig^a. 44.) Sector quilibet centralis AIB, AIC etc. $= \int \frac{a^2 d\varphi}{2 Cos.\ \varphi} = \frac{a^2}{2}.\ Log\left(Tang.\ 45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$. Est enim expressio illa eadem cum alia, quam vocant *Latitudinum crescentium* sive Mapparum in usum rei nauticae a Nicolao Mercatore atque Eduardo Wrightio constructarum (396). Area ergo a Linea ipsa comprehensa ex quadratura dependet Hyperbolae conicae, quemadmodum confirmatur ab altera expressione $\int y\,dx = \int \frac{dx\sqrt{a^4 - x^4}}{x}$ (397), totaque in infinitum protensa $ABCDI$, ideoque et quadrupla $ADEF$, infinitae est magnitudinis, secus ab Hyperbola Circuli in praecedente §^{o}. contemplata. Nec pulcherrima solummodo proprietate gaudet Sectorum centralium

$\frac{a^2}{2}$

$\frac{a^2}{2}\int\frac{d\varphi}{Cos.\ \varphi}=\frac{a^2}{2}\int d\varphi\ Sec.\ \varphi$ *Latitudinibus crescentibus* in Mappis Hydrographicis proportionalium, verum etiam Locus est geometricus Conorum rectorum *IBP*, *ICL* etc. innumerorum, qui Superficies convexas habeant *isoperimetras*, et aequales Circulo Curvae ipsius genitori in Figura depicto. Nam ducta tangente *AG* asymptotae *FD* parallela, et normalibus asymptotae eidem *GH*, *CL*, habetur ex Curvae genesi $IG : IC : IS \div$; quapropter $GH = IA : CL :: IC : IA$, et idcirco $IC : IA : CL \div$, videlicet ex Elementis Superficies conica a revolutione rectae *IC* generata aequalis est Areae Circuli radio praediti *IA*. Quemadmodum ergo Linea recta Locus est Rectangulorum *isoperimetrorum*, et Hyperbola Apolloniana Cylindrorum rectorum convexis Superficiebus *isoperimetris* gaudentium, ita Parabola Apollonii *ANRK*, cuius praecipuus vertex in *A*, *focus* in *I*, Locum statuit Triangulorum rectangulorum, in quibus $IN + NO = IR + RQ =$ etc. $= IK = 2IA = AE$, et Clairautii Curva Locum alterum, ubi sit $IB \,.\, BP = IC \,.\, CL =$ etc. $= IA^2$, Conique omnes inscripti exceptis (ut in Hyperbola) basibus *isoperimetri*. Linearum, quas Clairautius exposuit, postrema dignoscitur ab Aequatione $x^4 + a^2y^2 - a^4 = 0$, estque omnium unica, quae instar Ellipseos in se redeat. Nihilo tamen minus genesin noscit suam, quae parum a Parabola conica discriminetur. Revera Parabola oritur *IDKN*, si Elementorum memiueris, dum in Circuli Quadrante *IBGN* (Fig[a]. 45.) et Quadrato ei circumscripto *IMNO* puncta *D*, *K* etc. ita sumantur in normalibus innumeris *AE*, *FL* etc. super diametrum ductis, ut sint $AE : EC : ED \div$, $FL : LH : LK \div$ etc. Enascitur vero Lineae Clairautii Quadrans *IBGN* dum verae fuerint proportiones $AE : EB : EC \div$ etc., $FL : LG : LH \div$ etc. Linea ipsa est quadrigibba, nimirum in quatuor tumet punctis Ω, Υ, Φ, Δ, imitaturque eam Curvam pariter quadrigibbam §°. 9°°. memoratam, et ab Ioanne Bernoullio per motum *reptorium* genitam Ellipseos conicae super se progredientis, inverso tamen ordine Axium. Unusquisque quatuor gibborum facillima synthesi determinatur. Generatio etenim Curvae *datae* praebet Quadratum Radii cuiuslibet a Centro O educti $OB^2 = OE^2 + EB^2 = OE^2 + AE \,.\, EC = OE^2 + EC^2 + AC \,.\, CE = OI^2 + AC \,.\, CE$. *Maximus* itaque in Quadrante Curvae erit Radius dum $AC = CE$ ex Elementis. Bifariam igitur secto *IO* in *T*, ductaque perpendiculari *TV* usque ad occursum Periphe-

riae

riae Circuli genitoris, et ab occursu V parallela eidem Radio OI, haec gibbum Δ, et Radium *maximum* $O\Delta$ suppeditabit. Idem de reliquis tribus dicendum. Haec autem constructio idem illud statuit a Clairautio ope Calculi *differentialis* repertum, nempe $y = O\Pi = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}OI^2}$, atque $x = \Pi\Delta = \sqrt{\Gamma\Pi . \Pi V} = \sqrt{\frac{IO^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$. Angulus ergo ΔOP Tangentem habebit aequalem $\sqrt{\frac{2}{3}}$, ideoque minor erit semirecto, et $IO\Delta$ maior, atque Radius *maximus* $O\Delta$ ad Radium Circuli genitoris OI erit in ratione $\sqrt{5}:2$. Ista Radiorum *maximorum* in quatuor gibbis ad Radios *minimos* in quatuor compressionis punctis proportio congruit illi quadrigibbae Bernoullianae, dummodo Ellipseos genitricis Semiaxes sint a, $\frac{a}{3}$; propterea quod $\sqrt{2a^2 + 2b^2} : a + b$ ex Bernoullio (398) sint ut $\sqrt{5}:2$ tum quum Semiaxis minor $b = \frac{a}{3}$, quemadmodum patet. In hoc tamen differt Bernoulliana quadrigibba, de qua loquimur in praesentia, quod prima Radios *maximos* semirectos angulos habeat facientes semper cum *minimis*, secunda non item. Solidum illud rotundum a nostra quadrigibba genitum revoluta circum PON Axem τῶν y est ad circumscriptum Cylindrum natum a rotatione Rectanguli $MIQPON$ ut Area Circuli cuiusvis ad sibi circumscriptum Quadratum, vel ut Quadrans Circumferentiae ad duos simul Radios. Nam Cylinder ad Solidum proportionem servat ex Elementis, quam habet vicissim Summa quadratorum constantium IO^2, AE^2, FL^2 etc. ad Summam IO^2, BE^2, GL^2 etc., scilicet ob naturam Curvae Summa rectarum IO, AE, FL etc., aut Quadratum $IONM$, ad Summam rectarum IO, CE, HL, sive Aream Quadrantis Circuli $IONHC$. Neque Solidum istud, neque Aream Curvae protulit Clairautius, tametsi primum geometrica Synthesi solummodo adhibita in promtu fuerit, et altera a rectificatione obtineatur Ellipseos et Hyperbolae, quod praecipuum est argumentum huiusce *Exercitationis*. Neminem latet Aream illam peraequare $\int \frac{dx\sqrt{a^4 - x^4}}{a}$, sive potius $\int \frac{a^3\, dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} - \int \frac{x^4\, dx}{a\sqrt{a^4 - x^4}}$, cuius pars

 prior

prior ex doctrina Pascalii in §°. 40mo. tradita a rectificatione dependet Arcuum simul Elliptici et Hyperbolici, atque pars altera, facto $x^2 = az$, et conversa in Formulam $-\frac{\sqrt{a}}{2}\int\frac{dz \,.\, z^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^2-z^2}}$, per §^{um}. 42^{dum}. Arcubus simul earundem Sectionum Coni integratur. Utraque vero partium, ideoque et Area quaesita, Hyperbolam aequilateram, Ellipsinque eius *speciei*, quae ad Lemniscatam pertinet Bernoulliorum, praesefert. Exinde consequitur etiam τὸ $\int dy\,(a^4 - a^2y^2)^{\frac{1}{4}}$ ab Arcubus Conicarum, de quibus supra, integrationem recipere, vel, facto $a = 1$, $\int dy\,(1-y^2)^{\frac{1}{4}}$; quod Integrale est inversum illius a Maclaurino producti (uti dictum in §°. 42°.) $\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}$, ab Arcu tantummodo aequilaterae Hyperbolae dependentis. Et re quidem vera $\int dy(1-y^2)^{\frac{1}{4}} = \int\frac{dy}{(1-y^2)^{\frac{3}{4}}} - \int\frac{y^2dy}{(1-y^2)^{\frac{3}{4}}}$, cuius pars prima est inter Formulas Maclaurini, secunda, si fiat $z = (1-y^2)^{\frac{1}{2}}$, abit in τὸ $\int\frac{dz\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z}} = \int\frac{dz}{\sqrt{z}\,.\,\sqrt{1-z^2}} - \int\frac{z^2dz}{\sqrt{z}\,.\,\sqrt{1-z^2}}$, videlicet in notissimas Formulas praecitato §°. exspositas. Quae omnia non parum inserviunt illustrationi Capitis XVIII^{vi}. Partis I^{ae}. Bougainvillii *Tractatus*, ubi agit de Curvarum *quadratura* trinomiali Aequatione definitarum (399).

51. Ut promissis fidem liberem consideranda remanet illa Curva $\pm nx^2y^2 \pm y^2 \mp mx^2 = 0$, cuius Aream Spatio rectilineo parem esse in §°. 48vo. nunciavi. Ternae a combinatione signorum dimanant Lineae ordinis 4^{ti}., nimirum $nx^2y^2 + y^2 - mx^2 = 0$, $nx^2y^2 - y^2 - mx^2 = 0$, $nx^2y^2 - y^2 + mx^2 = 0$. Harum postremam si spectes, analogia gaudere evidentissima liquido constabit eum *Hyperbola-circuli* in §o. 49no. explicata. Nam in ista

dum

dum eius abscissae Sinubus, et ordinatae Secantibus eiusdem Arcus Circularis aequales sunt, illa vicissim abscissas Sinubus, ordinatasque Tangentibus aequales habet. Est igitur etiam haec nova Curva asymptotica; quinimo idem centrum, quod heic etiam denotat verticem, easdemque asymptotas servat *Hyperbolae-circuli*, cuius Parameter $a = \frac{1}{\sqrt{n}}$: nam Aequatio illa perducit ad alteram $y = \pm \sqrt{m} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot x}{\sqrt{\frac{1}{n} - x^2}} \right)$. Quibus positis Area pertinens ad Hyperbolam Circuli est ad eam nunc quaesitam veluti Summa Secantium ad Summam Tangentium per τὸ $\sqrt{m}$ multiplicatam, scilicet, ut $\int \frac{d\,Sin.\,\varphi}{Cos.\,\varphi} = \varphi$ ad $\sqrt{m} \int \frac{d\,Sin.\,\varphi\,(Sin\,\varphi)}{Cos.\,\varphi} = \sqrt{m} \int d\varphi\,.\,Sin.\,\varphi = \sqrt{m} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - Cos.\,\varphi \right)$ ex passim demonstratis, ac potissimum in §§[s]. 15°. ac 22[do]. de Ungula *primaria* recti Cylindri. At φ, vel hoc in casu ob praemissa $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \varphi$, seu duplus Circuli genitoris Sector, ex §°. 49[no]. Aream peraequat spectantem ad Hyperbolam Circuli. Ergo $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - Cos.\,\varphi \right) = \sqrt{\frac{m}{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\frac{1}{n} - x^2} \right)$ partem Areae Curvae novae ad abscissam x pertinentem significabit; et idcirco erit $\frac{\sqrt{m}}{n}$ Quadrans Areae totius. Ceterum omnes sciunt Lineam illam Tangentium et *partialiter* et *totaliter* praedictae Ungulae aream area sua peraequare (400). Silentio tamen praeterire nequeo huiuscemodi Curvarum familiae simplicissimam Aequatione praeditam $x^2y^2 - a^2y^2 + a^2x^2 = 0$ ita exprimi trigonometrice $z = \pm \frac{a\sqrt{-Cos.\,2\varphi}}{Sin.\,\varphi\,.\,Cos.\,\varphi}$, vel $z = \pm \frac{2a\sqrt{-Cos.\,2\varphi}}{Sin.\,2\varphi}$; quod significat z *imaginarium* esse donec φ non fuerit $= 45°$; hoc in casu fieri $= 0$; $z = 2a$ quum $\varphi = 67°\,30'$; deindeque, quum $\varphi = 90°$, evadere $z = \infty$. Linea igitur, in qua sumus, *OSITV* (Fig[a]. 46.) quatuor infinitis ramis composita, et nodo

 gaudens

gaudens S, aut duobus punctis *inflexionis* vel *regressus*, tangentes habet in eodem nodo seu vertice CSD, ASB sibi invicem perpendiculares, Curvamque omnem complectentes, prouti in §°. 41mo. de utraque Lemniscata disserui. Proprietas autem nulli secunda, quae in Linea ista Tangentium elucet, hactenus quod sciam a nemine Geometrarum detecta, non modo elegantem comparationem respicit Areae ipsius Curvae asymptoticae $OSHG$ cum altera pariter asymptotica $FESHG$ Hyperbolae-circuli, ex qua fit ut secunda ad primam sit in proportione Quadrantis circumferentiae genitoris EQH ad Radium ES, vel Semicircumferentiae ad Diametrum, verum etiam consistit in elegantissima ac perfecta aequalitate Arearum infinite-longarum tam nostrae huiusce Lineae $OSHG$, quam Logarithmicae $SNPH$, cuius Subtangens et Ordinata Radio $ES = SH$ pares fuerint. Porro haec ultima adfectio miraculum Geometriae redolere aliqui existimabunt, eoquod aequalitatem sistat Arearum, saepius incomparabilium, Curvae *Geometricae* ac *Mechanicae*, vel aptiori stilo *Algebraicae* et *Transcendentis*. Primum faciliter demonstratur, quum in universum ostenderimus Quadrantem Areae $FESHG = 2EQHS = ES . EQH$ (§°. 49no.), et Quadrantem Areae alterius Curvae $OSHG = \frac{\sqrt{m}}{n}$, nempe in postrema hypothesi $\frac{\sqrt{1}}{\frac{1}{a^2}}$ $= a^2 = ESHC = ES . ES$; ex quo etiam consequitur, si velis, Arearum asymptoticarum $OSHG$, $FECG$ proportio aequalis ei, quae intercedit inter Diametrum cuiusvis Circuli et Differentiam Semicircumferentiae eiusdem ab ipsa Diametro. Secundum autem deducitur a notissima Logarithmicae theoria, quae Aream eius infinite productam $SNPH$ Quadrato $SLMH$, aut $ESHC$ (vel ex demonstratis $OSHG$) aequalem esse concludit (401). Quaestio tamen omni iure hic suboriri potest, undenam fiat duarum Curvarum SO, SN ab eodem puncto S digredientium, et communi tangente DSC praeditarum, ideoque se invicem contingentium, ac toto caelo dissitarum, Areas aequales cum communi asymptota $HCPG$ claudere posse? Quod ut inlustrem aliquomodo, concipio primum Logarithmicam Neperianam in puncto Λ ordinatam habere $C\Lambda$, seu Numerum, cuius Logarithmus *hyperbolicus* negativus sit Subtangens $HC = 1$; eritque $C\Lambda = \frac{1}{2.302 \text{ etc.}}$, nempe maior ordinata $C\Delta$, quum Tangens $EC = CH$ respondeat Sinui

KQ

$KQ = SP = \frac{1}{\sqrt{2}}$, sitque ideo $PH = C\Delta = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{1.414 \text{ etc.}}$ $= \frac{0.414 \text{ etc.}}{1.414 \text{ etc.}} < \frac{1}{2.302 \text{ etc.}}$, videlicet $< C\Lambda$. Logarithmica igitur $SX\Lambda$ initio remotior est ab asymptota HCG prae Linea Tangentium $S\beta\Delta$; sed deinceps duo Curvae ita invicem adpropinquantur, ut tandem Logarithmica ipsa secet in Y Lineam Tangentium, atque exinde asymptotae suae vicinior fiat. Inventio huiusce intersectionis puncti Y non difficiliter derivatur a resolutione Aequationis *cubicae*. Nam punctum istud huiuscemodi est, ut ductis YR asymptotae parallela, et YZ perpendiculari, esse debeat $HZ = RY =$ Tangenti arcus Sinum habentis SR, aut $=$ Logarithmo negativo τῆ $ZY = HR = SH - SR = 1 - x$. Quibus omnibus praemissis oritur $-d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -d \text{Log.}(1-x)$, sive $\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{1-x}$, nempe $(1-x)(1+x)^3 = 1$, vel $x^3 + 2x^2 - 2 = 0$, nimirum τὸ x satis proxime (at vero maius) $= \frac{17}{20}$, et idcirco (at vero minus) $1 - x = HR = \frac{3}{20} = \frac{3SH}{20}$. Nec poterat quin contingeret eadem intersectio Curvarum, propterea quod asymptota HG pertinens ad Lineam Tangentium Infinitum est 1ⁱ. ordinis, utpote $= \frac{SH^2}{0}$ ex Elementis; asymptota autem Logarithmicae Infinitum est 1°. ordine inferius ex dictis in §°. 49ⁿᵒ., quae nunc luculentissime corroborantur. Aliae duo Curvae Aequationibus distinctae $nx^2y^2 + y^2 - mx^2 = 0$ sive $y = \sqrt{m}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}} . x}{\sqrt{\frac{1}{n} + x^2}}\right)$, atque $nx^2y^2 - y^2 - mx^2 = 0$ vel $y = \sqrt{m}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}} . x}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{n}}}\right)$ ab Hyperbola aequilatera directam originem no-

scunt,

scunt, facilesque adeo sunt, ut post eam, quam supra tractavimus ortam a Circulo seu Ellipsi aequilatera, in ipsis immorari supervacaneum exsistimem. Libet tantummodo, neglecta Parametro $\sqrt{m}$, aut facto $m=1$, Aequationes earum addere Trigonometricas; videlicet pro prima $x^2y^2 + a^2y^2 - a^2x^2 = 0$ valet $z = \pm 2a \frac{\sqrt{Cos.\ 2\phi}}{Sin.\ 2\phi}$, atque pro altera $x^2y^2 - a^2y^2 - a^2x^2 = 0$ valet elegantior $z = \frac{\pm 2a}{Sin.\ 2\phi}$. Origo, figura, asymptotae, aliaque Linearum harumce symptomata in promtu sunt; id autem, quod earum Areas spectat, ope superiorum Functionum Circuli ludentem potius, quam serio cogitantem Geometram poscit. Unum duntaxat pergratum futurum iri lectoribus censeo in Arearum, quibus hactenus operam navavi, iucunda quadam contemplatione. Sit enim in eâdem Fig^a. 47. descriptum trium Curvarum Systema (aemulans frusto suo Equitum *Crucem*) (400), quod complectitur Aequatio 12^mi. ordinis $y^6 = \frac{a^6 x^6}{(a^2 - x^2)(a^2 + x^2)(x^2 - a^2)}$, ubi S centrum commune triplicis Lineae hoc in §°. consideratae, et Quadrati $BACM$, in quaterna divisi ope rectarum ESL, DSH, cuius Latus $AB = SE = SF = SG = SN = 2a$. Tres istae Curvae, praeter commune Centrum S, communibus quoque gaudent quatuor asymptotis, quae sunt Latera antea descripti Quadrati, vacuumque omne tanta implent elegantia, ut quà earum una ob *imaginaria* existere nequit, subeat altera, atque vicissim, instar Systematis Circuli et Hyperbolae, aut Hyperbolarum coniugatarum. Pulcherrimum profecto obviam fit Geometriae spectaculum, nimirum duas rectas illas, sibi invicem normales BSC, ASM atque diagonales praedicti Quadrati, adeoque semirecto angulo inclinatas ad Axes Curvae duplicis circa centrum et communem verticem S dispositae, dum Tangentes sunt geminae eiusdem Curvae, versa vice Axes esse tertiae Curvae octo infinitis ramis conflatae, nempe totidem, quot adamussim habent duo simul Lineae interiores. Exinde nascitur quatuor vertices E, N, G, F simul coniunctos Quadratum efformare $ENGF$ praefati duplum $BACM$, quemadmodum hoc postremum aeque duplum potest τῷ $OP^2 = QR^2 = VX^2 = ZP^2$. Aequalitas ista quatuor rectarum OP, QR, VX, ZP evidenter ostendit duas Curvas in S se mutuo

mutuo contingentes ipsammet esse Lineam geminatam; quod non solum confirmatur ab Aequationibus $z = \pm 2a \frac{\sqrt{-Cos.\, 2\phi}}{Sin.\, 2\phi}$, $z = \pm 2a \frac{\sqrt{Cos.\, 2\phi}}{Sin.\, 2\phi}$, verum etiam a vulgaribus $x^2y^2 - a^2y^2 + a^2x^2 = 0$, $y^2x^2 - a^2x^2 + a^2y^2 = 0$, quum inversis Axibus τῶν x, y, ut in Figura, unam eandemque Aequationem, eundemque geometricum Locum significent. Accedit elegantissima methodus Areas trium Curvarum constructione synthetica adipiscendi. Nam si a puncto quolibet K Quadrantis Circuli, centro S et radio ES descripti, educatur tam recta $\Pi K \Sigma \Delta$ parallela ES, quam secans $SK\Phi$, erit Rectangulum $\Pi\Sigma . \Sigma K$ ex iam demonstratis aequale Trilineo $SO\Delta\Pi = SR\Theta\Gamma$, alterumque Rectangulum $SK . K\Phi$ aequale Trilineo $SR\Theta\Psi = SO\Delta\vartheta$; adeo ut unum ad alterum Trilineorum sit in proportione τῦ $\Sigma K : K\Phi$, primaque Trilinea crescant decrescantve ut ΣK, et idcirco semper finitae magnitudinis sint etiam in infinitum producta; secunda vero uti $B\Omega, \Phi K$ etc., ideoque magnitudinis infinitae tum, quum in infinitum protensa fuerint. Revera Trilineum $SR\Theta\Psi = \Phi E . \Gamma S - \Sigma K . ES = (\Gamma\beta - \Sigma K)$ $ES = \Phi K . ES = \Phi K . KS$, quia $\frac{(Sin.\, \phi)^2}{Cos.\, \phi} - (1 - Cos.\, \phi) = \frac{1}{Cos.\, \phi} - 1$; quae proprietas minus nota ceteris adfectionibus Circuli est non immerito adnumeranda. Id ipsum, quod Circuli Quadrans effecit in Area determinanda $SO\Delta\Pi$ praesidio Rectanguli $\Pi\Sigma . \Sigma K$, efficit etiam Quadrans aequilaterae Hyperbolae $Hk\nu\varepsilon$ centro eodem S, ac vertice H descriptae. Area enim $yH\varepsilon\Xi Fy = \varepsilon\lambda . \varepsilon\nu$, $yH\mu\mathfrak{E}Ey = \mu n . \mu\varepsilon$; ita ut Areae istae, magnitudinis semper finitae praeter casum τῦ puncti μ in infinitum progressi, proportionem servent inter se τῶν $\varepsilon\nu, \mu\varepsilon$ etc. ordinatarum Hyperbolae. Puncto autem intersectionis k id accidit singulare, ut determinationi facillimae inserviat frusti Areae ipsius Curvae infinite-longi, aequalis Quadrato $EBHS$, vel spatio asymptotico infinite-longo adiacentis Lineae Tangentium. Haec omnia, mutatis mutandis, ad universaliores etiam pertinent Lineas quicumque fuerit valor τῦ m, propterea quod τὸ $\sqrt{m}$ Parametri vicem gerit eodem penitus modo, quo vidimus in §°. 49no. disserentes de Hyperbolis-circuli *aequilateris* et *scalenis*, non secus ac in 15to. de Ungulis *secundariis* atque *primariis*.

52. Dum

52. Dum hasce Curvarum speculationes in additamenti specimen ad praecitatum Caput XVIII^{um}. Voluminis I^{i}. *Tractatus Calculi Integralis* a Bougainvillio editi e schedis meis exscribebam occurrit mihi molimentum quiddam perantiquum Curvas omnes distribuendi in classes, genera, ac species non Cartesiano more, uti solet (403), sed Trigonometrico, plerumque commodiori, et Eulero omnium primo docente (404) inventorum pene dixerim mirabilium ultra spem foecundissimo. Aliqua, nec poenitenda, de hoc argumento iam delibavi in praecedentibus §§^{is}. 41°. 49°. 50°. et 51°., totumque si complecti unquam vellem peculiarem tractationem exposceret. Pauca obiter eorum, quae multis abhinc annis meditabar, et festinanter aperiam. Linea recta hac Aequatione distinguitur $z = \frac{a}{Cos.\ \varphi}$, duoque rectae parallelae $z = \frac{\pm a}{Cos.\ \varphi}$, prouti dixi in §°. 50mo., vel potius $z = \frac{a}{Sin.\ \varphi}$, $z = \frac{\pm a}{Sin.\ \varphi}$. Universaliter interim animadvertam Aequationes omnes trigonometrico more expressas significare Lineas easdem semel atque substituatur $Sin.\ \varphi$ pro $Cos.\ \varphi$, et viceversa, scilicet numeratio Angulorum φ ab uno Axium ad alterum transeat illi normalem. Quae animadversio Aequationum omnium possibilium formas arctioribus coërcet limitibus ad sequentia inlustranda, quam prima fronte adpareret. Circulus autem Aequatione exornatur $z = a\ Cos.\ \varphi$ dum anguli a diametro incipiant, vel $z = a\ Sin.\ \varphi$. dum initium sumant a tangente ab extremo diametri educta: Circulus deinde geminatus, vel duo simul aequales Circuli se invicem et exterius contingentes, atque Lemniscatam imitantes, Aequatione gaudent per §^{um}. 41um. $z = \pm a\ Cos.\ \varphi$, aut potius $z = \pm a\ Sin.\ \varphi$. Adcedunt proxime $z = \frac{b \pm a}{Cos.\ \varphi}$ vel $z = \frac{b \pm a}{Sin.\ \varphi}$ pro Lineae rectae aut antiquorum Conchoide, vulgo dicta Nicomedea (405), necnon $z = b \pm a\ Cos.\ \varphi$, aut $z = b \pm a\ Sin.\ \varphi$ pro recentiorum vel Circuli Conchoide cum *polo* in extremitate diametri collocato (406), de qua plura in §°. 55to. et sequentibus occasione doctrinae Pascalii eo magis amplificandae explicabo. Dimanant a primis, ordine comparationis servato, Lineae ita expressae $z = \frac{\pm a}{(Cos.\ \varphi)^2}$ (Mediana parabolica §^{i}. 50^{mi}.), $z = \frac{\pm a}{(Cos.\ \varphi)^3}$,

$z =$

$z = \frac{\pm a}{(Cos.\varphi)^4}$, breviusque $z = \frac{\pm a}{(Cos.\varphi)^n} = \pm a(Cos.\varphi)^{-n}$, usque ad $z = \pm a(Cos.\varphi)^{-\infty}$, dummodo *n* sit numerus integer positivus. Non secus ab Aequatione Circuli profluunt analogae $z = \pm a(Cos.\varphi)^2$, $z = \pm a(Cos.\varphi)^3$, $z = \pm a(Cos.\varphi)^4$, aut uno verbo $z = \pm a(Cos.\varphi)^n$, usque ad $z = \pm a(Cos.\varphi)^{\infty}$, in eâdem τῆ *n exponentis* suppositione. Eadem de Sinuum *potentiis* dicenda sunt praeditis *exponente* integro positivo vel negativo, neminemque latet idgenus Potestates summa facilitate in Cosinus, Sinusque Angulorum multiplorum converti (407). Potentiae Sinuum, Cosinuumve simplicium, aut multiplorum Arcuum *exponentibus* fractis, positivis seu negativis, adfectae originem praebent pluribus aliis Lineis, quas nimis molestum esset enumerare. Exemplo sint $z = \frac{\pm a}{\sqrt{Cos.\varphi}}$ sive *Mediana hyperbolica* § 50mi., $z = \pm a\sqrt{Cos.2\varphi}$ seu Lemniscata percelebris Bernoulliorum iuxta §um. 41um. ac §um. 49num. Procedunt Lineae, quarum Aequationes fuerint reconditiores, utpote $z = \pm a\, Cos.\frac{m\varphi}{n}$, scilicet Multifolia aut Guidonis Grandii *Rhodoneae* (408), $z = \pm \frac{a\, Sin.\varphi}{Cos.\varphi}$ vel Linea, cuius Aequatio $x^4 + x^2y^2 - a^2y^2 = 0$ Clairautii *trinomialibus* non absimilis, $z = \frac{a(Sin.\varphi)^2}{Cos.\varphi} = \frac{a(1 - Cos.2\varphi)}{2\, Cos\,\varphi}$ vel Cissois veterum aut Dioclea, $z = \frac{a\, Sin\, m\varphi}{Sin.\varphi}$ vel aequatio Curvarum *Goniotomi* Iesuitae Thomae Cevae, de quibus plura disceptavi in *Analectis* meis hactenus ineditis (409), $z = \frac{a}{1 + Cos.\varphi} = \frac{\frac{1}{2}a}{(Cos.\frac{1}{2}\varphi)^2}$ ad Parabolam Apollonii, sive etiam universalius $z = \frac{a}{1 + n\, Cos.\varphi}$ ad ternas Coni-sectiones, $z = \pm \sqrt{a^2 - c^2(Cos.\varphi)^2}$ vel $z = \pm\sqrt{b^2 + c^2(Sin.\varphi)^2}$ ad unam e celeberrimis Curvis Spiricis (410), quae in Lemniscatam Bernoullianam abit si $c^2 =$

 $2a^2$,

$2a^2$, quum eo casu Aequatio evadat $z = \pm a\sqrt{1 - 2(Cos.\varphi)^2} = \pm a\sqrt{-Cos.2\varphi}$ seu, quod eodem redit, $= \pm a\sqrt{Cos.2\varphi}$, $z = \pm a \cdot \frac{2\sqrt{\pm Cos.2\varphi}}{Sin.2\varphi}$ in §°. 51°. iam contemplata, ac tandem, ne sermo iste fastidio vertatur, $z = \frac{a(1 \pm Sin.\varphi)}{Cos.\varphi}$ pertinens ad egregiam Lineam illam *nodatam* et duobus infinitis ramis praeditam, quam antea laudatus Hycrosolimitanus Eques Nieuportus in *Actis* vulgavit *Caesareae Academiae Bruxellensis* (411). Haec vero Nieuporti Linea 6[ti]. ordinis eo nobilior censeri debet, quod cognationem maximam habeat Hyperbolae aequilaterae ad alterutram asymptotarum relatae. Quemadmodum enim in prima est $AE = AC + CB$, $AF = AD + DB$ etc. (Fig[a]. 48.), necnon $AE' = AC - CB$, $AF' = AD - DB$ etc., ita in secunda est $CB = LA + AT$, $FR = LO + OT$ etc., et $CB' = LA - AT$, $FR' = LO - OT$ etc. ex Conicis Institutionibus. Diversum genus classemque adtinent Aequationes aliae, quae functionibus Circuli et eiusdem Arcubus simul componantur. Omnibus ferme istius classis praecellit ea Curva *transcendens* Aequatione distincta $z = \frac{a\,Sin.\varphi}{\varphi}$, quam Gregorius Fontana veluti novam consideravit, et rei harmonicae utillimam, in Parte I[ma]. Voluminis II[di]. *Memorabilium Societatis Italicae*, eaudemque dixit a se prius animadversam in Problemate II[do]. *Disquisitionis* IX[ae]. inter ceteras Papiae editas vertente anno M.DCC.LXXX°. Ego autem Lineam ipsam elegantissimam Problemati etiam I[mo]. memoratae *Disquisitionis* satisfacere arbitror, et insuper cum ea consentire publici iuris facta usque ab anno M.DCC.LXIII[io]. in Volumine VIII[vo]. *Novorum Commentariorum Academiae Petropolitanae* ad pag[am]. 261[am].

Nam aut Curvae Aequatio sit $z = \frac{1 \cdot Sin.\varphi}{\varphi}$, aut $z = \frac{\frac{2}{3} \cdot Sin.\varphi}{\varphi}$, aut tandem $z = \frac{Q \cdot Sin.\varphi}{\varphi}$ supposito Q Quadrante Peripheriae circularis Radio 1 gaudentis, natura Lineae eadem manet, quippe sola permutata Parametro aut *Modulo*. Si nomen Curvae desideres, eam non immerito nuncupandam

cupandam putaverim *Quadrantariam polarem*, valde diversam a *Quadratrice Spirali*. Quemadmodum enim proprietas, aut Aequatio simplicior Hyperbolae conicae, ac Logarithmicae ab Ordinatis Asymptotae normalibus ad Radios translata Hyperbolam Logarithmicamve *spiralem* genuit, non eodem iure de antiquorum sive Dinostrati Quadratrice sentiendum est illi superius expositae comparata, ut liquido constat a conlatione praecitatae pag. 26[tae]. *Summarii* et 167[mae]. ac 168[vae]. *Scholii* Voluminis VIII[i]. antea dicti Imperialis Academiae. Vera profecto *Quadratrix spiralis* congruit Helici Archimedeae. *Quadrantaria* autem *polaris* hoc habet praecipuum (Fig[a]. 49.) a me nuper detectum, quod vocatis 1 Radio *IB* Circuli genitoris, *Q* eius Quadrantis Peripheria *BDO*, Radio *vectore IA* $= z$, numeratisque Angulis φ a Radio *maximo* $IC = BDO$, sit ubivis Arcus Circularis AT, centro I, et radio IA descriptus, $=$ Quadranti DS, cuius radius DV Sinus-rectus anguli φ: ex quo et nomen Curvae, et Figura innumeris contexta foliis circa centrum I, et eam describendi facilitas summa, et ceterae adfectiones ipsius luculentissime derivantur.

53. Ea inter, quae sparsim ac festinanter illa iuvenili faustissima tempestate adnotaveram dum de Curvis universis novo ordine disponendis excogitabam, numeris omnibus reperio a me tum absolutam Ovalium praestantissimarum Seriem cum adiunctis rarioribus illarum proprietatibus, initio Tabulae sumpto ab Aequatione $z = a\,Cos.\,\varphi$ sive Circulo cunctarum Ovalium pinguissimo, et fine ipsius Tabulae posito in Aequatione $z = a\,(Cos.\,\varphi)^{\infty}$, quae puncta Axis extrema, Ovalium gracilissima, oculis subiicit. Post Circulum statim occurrunt nativum ordinem prosequentibus Ovales duo, Aequationibus distinctae $z = a\,(Cos.\,\varphi)^2$, $z = a\,(Cos.\varphi)^3$, eaedemque sunt, quas Ioannes Baptista Villalpandus Iesuita Cordubensis, utpote duplicationi Cubi inservientes, apto nomine *proportionatrices* vocavit, exornavitque in Volumine III[io]. *Apparatus Vrbis ac Templi Hyerosolimitani* typis excuso Romae vertente anno M.DC.IV°. (412). Quod dum memoria repeto, haud parum obstupesco ignotum istud fuisse Antonio-Mario Lorgnae, qui in III[io]. *Opusculorum trium ad res mathematicas pertinentium* Veronae editorum anno M.DCC.LXVII°., non modo Ovalium unam Villalpandi (413) praeditam Aequatione $y^4 + 2x^2y^2 + x^4 - 2ax^3 = 0$, aut mea methodo $z = a'(Cos.\,\varphi)^3$ facto $a' = 2a$, veluti novam prodiderit, Problemati Deliaco aeque adplicuerit, minusque idoneo nomine

 Cissoidis-

Cissoidis-lemnisceroticae insigniverit (414), sed etiam praecipuas eius adfectiones Calculo detexerit, quarum nonnullas iamdudum Vincentius Vivianus lineari Synthesi duce adseruerat usque ab anno M.DC.LXXVI°. in Appendice *Continuationis Geometrici itineris* (415) Italico sermone Florentiae editae (416). Ut hoc evidentissime pateat, et divinatione quadam utar in celatas a Viviano hodieque deperditas elegantiores sistendas demonstrationes, libet inprimis genesin ipsius Ovalis ab eodem Viviano repetere, quum prae constructione a Villalpando data simplicior sit, atque admodum ingeniosa (417). Neque hac solum ratione excitatus Ovalem istam nunc pertractare in animo habui, sed praesertim eoquod *Medianae-parabolicae* Clairautii in §°. 50mo. expositae sit veluti supplementum, eiusdemque ordinis 4^{ti}. (secus ac altera Villalpandi Ovalis (418) $z = a'(Cos.\ \varphi)^2$, aut $(x^2+y^2)^3 - 4a^2x^4 = 0$ ad 6um. ordinem pertinens, de qua sum alibi loquuturus), et propter insignem adfinitatem argumenti potissimi *Exercitationis* huiusce, quum ipsius Ovalis perimeter a Sectionum Conicarum rectificatione impetretur. Revera Ovalis eadem ita describitur. Sit Circulus diametro praeditus AB (Fig^a. 50.), cuius ab extremo elevetur tangens indefinita BCD, dum ab altero extremo A, veluti *foco*, ducatur quaelibet Chorda AEC usque ad occursum tangentis, et fiat $AC : AE : AF \div$, erit punctum F in Ovali quaesita. Ab ista constructione simplicissima consequitur protinus Aequatio Curvae, ob praedictam Proportionem $\div \dfrac{a'}{Cos.\ \varphi} : a'\, Cos.\ \varphi : a'\,(Cos.\ \varphi)^3 = z$, quemadmodum supra. Consequitur etiam ratio evidens analogiae quo ad Lineam memoratam Clairautii: nam *foco* A ad centrum Circuli G translato, et Proportione inita $GR : GC : GH \div$, punctum H est in Curva postrema $HBKLAM$, quia $\div$ $a : \dfrac{a}{Cos.\ \varphi} : \dfrac{a}{(Cos.\ \varphi)^2} = z$, ut in §°. antecedente. Praeterea consequitur methodus facilis inveniendi *maximam* Ordinatarum VT: nam Ordinata quaevis FZ ita est comparata per Curvae generationem, ut $FZ : EX :: AZ : AX :: AX : AB$, nimirum $AB \,.\, FZ = AX \,.\, EX$, ideoque FZ *maxima* tum quum $AX \,.\, EX$ *maximum* fuerit. Sed ex Elementis si Radius GB bifariam secetur in N, est $AN \,.\, NO$ *maximum*. Igitur sumpto $BN = \dfrac{AB}{4}$, ductisque normali

normali NO et chorda AOS, punctum T in Ovali gaudebit *maxima* Ordinata TV, et tangente Axi AB parallela; scilicet propter $AB:AN:AV \div$, aut $1:\frac{3}{4}:\frac{9}{16}\div$, erit Abscissa $AV=\frac{9}{16}AB$, aut $BV=\frac{7}{16}AB$, et $AN.NO=\frac{3}{4}.\sqrt{\frac{3}{16}}.AB^2=AB.TV$, nempe $TV=\frac{3}{16}\sqrt{3}.AB$, sive $TV:AB::\sqrt{27}:16$; quae omnia cum Viviani, et Lorgnae sententia ad unguem conveniant (419). Consequitur denique Area Curvae, quae brevi manu invenitur. Multum equidem laboris et Calculi impendit Lorgna ut Aream ipsius Ovalis ad Quadraturam Circuli perduceret, nimirum ad $\int\frac{a^2dz}{2\sqrt{2az-zz}}$, supposito $2a$ Curvae Axe, et vice Abscissae x substituta Functione $\frac{z^2}{2a}$ (420). Ego autem sic potius sermonem syntheticum instituebam. Elementum Areae Ovalis *datae* $FZ.dAZ=\frac{AX.XE}{AB}.\frac{d(AX)^2}{AB}$ ex praemissis, sive $=\frac{2.XE.\frac{AX^2}{AB}.dAX}{AB}$, sive duplo Solidi Cyclo-parabolici facti a Semicirculo genitore $A\Upsilon B$ ducto in Trilineum Parabolae conicae $AT\Lambda\Phi$, vertice A, parametro AB descriptae, quod duplicatum Solidum per AB dividatur. At ex theoria *de ductu Plani in Planum* elapso saeculo valde promota, ac potissimum ab Iesuita Gregorio a Sancto Vincentio (421), Cyclo-parabolicum illud adaequat $\frac{5}{16}$ Hemicylindri, cuius basis sit Hemicirculus idem genitor $A\Upsilon B$, altitudo aut axis AB (422). Igitur Area Semiovalis par est $\frac{5}{8}$ Semicirculi genitoris, totaque Area $\frac{5}{8}$ totius Circuli genitoris et circumscripti (422). Haec conclusio mirum in modum congruit alteri simplicissimae a Calculo derivandae. Nam Elementum ipsius Areae, dum Ovalis ad *focum A* referatur, est $\frac{z^2d\phi}{2}=$

$\frac{a\iota^2}{2}$

$\frac{a'^2}{2}.(Cos.)\varphi^6 d\varphi$, ideoque *summa* $= \left(\frac{a'^2}{2}\right)(90°)\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)$ dum φ = angulo recto, nempe $= \frac{15}{48}$ aut $\frac{5}{16}$ Quadrantis Circuli $AB\Xi\Theta$, vel $\frac{5}{8}$ $A\Upsilon B$ Semicirculi genitoris (423). Exinde patet quanta facilitate ab Aequationibus Trigonometricis Quadraturae Curvarum saepenumero erui possent, Tabulaeque condi, si novae Linearum distributioni in §°. 52do. explicatae locus esset, ope Capitis V^ti^. nunquam satis laudandi Partis I^ae^. Sectionis I^ae^. *Institutionum Calculi Integralis* Leonardi Euleri (424) locupletiores, aptioresque Newtonianis veteri methodo innixis (425) Quadraturarum earundem, aut absolutarum, aut a Circulo et Hyperbola etc. dependentium. Liquido etiam constat Ovalem eam Villalpandi spatium claudere adamussim aequale illi Ellipseos Apollonianae $A\delta B\beta$ super ipsum Axem maiorem AB descriptae, sed cuius minor Axis $\delta\beta$ ad maiorem sit in ratione τ̃ 5 : 8. Neque unquam putes Aequationem $z = \pm a'(Cos.\ \varphi)^3$ signo ita geminato Ovalem illam veluti completam perfectamque denotare cum adcessione reliquae partis $APQ\Pi$, mancamque ideo et mutilam esse Curvam prouti a Villalpando et Viviano descripta fuit. Aequatio enim $z = \pm a'(Cos.\varphi)^3$ eadem est cum $z^2 = a'^2(Cos.\varphi)^6$, vel $(x^2 + y^2)^4 - a'^2x^6 = 0$, aut $(x^2+y^2)^2(x^2+y^2)^2 - (a'x^3)(a'x^3) = 0$, ita ut nihil aliud significet praeter Systema eiusdem Villalpandi Ovalis *binatae*, haud secus atque $z = \pm a\,Cos.\,\varphi$ non eandem Curvam algebraicam continuam, sed potius *binatum* Circulum indigitat. Revera idem contingeret Lineae ordinis 3^ii^. ac *generis* Parabolici ita expressae $z = \frac{a}{(Cos.\varphi)^3}$, sive $x^2 + y^2 - \frac{x^3}{a} = 0$: nam $z = \frac{-a}{(Cos.\varphi)^3}$ ipsammet Curvam ingeminat ex parte negativorum $x^2 + y^2 + \frac{x^3}{a} = 0$, quae *species* est 69na. iuxta supputationem Newtoni (426), quemadmodum Parabolae accideret Apollonianae semel atque hac Aequatione $y^2 = \pm ax$ vel $y^4 = a^2x^2$ eam exponere libuisset (427).

54. Nulli tamen usui Curvarum, de quibus agere incoepi §°. 47mo., si decus spectes Geometriae, comparanda est adplicatio huiusce doctrinae ad celeberrimum, at meo saltem iudicio plus, quam par erat, ab initio anteacti

anteacti saeculi ad nostram usque aetatem elaboratum Problema de dimensione Superficiei Coni circularis *scaleni*. Robervallius primus omnium (Barrowio haud excepto, qui idgenus argumentum tractavit universaliter in *Appendicula* 2ª. *Lectionis Geometricae* XIImae. ad pagam. 117mam. Editionis Londinensis etc.) ac quidem multo ante annum M.DC.XLVIIum., id molitus est, et obtinuit, teste Evangelista Torricellio (in *Enarratione quorundam Problematum* etc. num°. 48°), quocum atque summis ea tempestate florentibus Galliae Geometris, ac praesertim Robervallio ipso, commercium erat epistolarum, mathematicumque certamen (429). Demonstrationem celatam, atque deperditam (430) Petrus Varignonus restituendam curavit, sed Algebrae subsidium impetratus occulto primum nomine inventum suum exhibuit vertente anno M.DC.XCVIII°. Scientiarum Academiae Parisiensi (431), deindeque Academiae Berolinensi, quae postumum illud vulgavit in Volumine IIIio. seu *Continuatione II*a. *Miscellaneorum* typis edita anno M.DCC.XXVII°. nomine Auctoris detecto (432). Ibidem extat quomodo Leibnitius pro *Miscellaneis* ipsis methodum Varignoni perficere adgressus fuerat, atque dum hic obliqui Coni Superficiem ab Arcu Lineae *transcendentis*, nimirum ope quadraturae Circuli describendae, consequutus fuerat, ille ex adverso a rectificatione Curvae *algebraicae* dependentem ostendit (433). Krafftius autem in XIV°. ac postremo Volumine veterum *Commentariorum Imperialis Academiae Petropolitanae* pro annis M.DCC.XLIV°. XLV°. et XLVI°. (tametsi lucem publicam viderit anno M.DCC.LI°.) rectificationem Curvarum reiiciens, Superficiem Coni *scaleni* dimetiri docuit praesidio Lineae *algebraicae* ordinis quarti (434). Adcessit ad rem istam suo more exornandam Leonardus Eulerus, qui in Volumine I°. *Novorum Commentariorum* eiusdem Academiae pro annis M.DCC.XLVII°. et XLVIII°., typis tamen excuso vertente anno M.DCC.Lmo., non modo errorem, quem passus erat Leibnitius, modestissime castigavit, verum etiam provinciam istam amplissime reddidit locupletiorem (435). Alembertus denique rem omnem a novis pene fundamentis erexit in *Opusculorum Mathematicorum* anno M.DCC.LXI°. editorum Volumine I°., illiusque labor quum institutum hocce meum propius tangat, mei muneris esse iudico aliqua de eo commentari (436). Varignonus et Krafftius Problema perduxerunt ad quadraturam Lineae ordinis 4ti.; ille quidem ad Aream Curvae $x^2y^2 -$

$2rxy^2$

$arxy^2 + \frac{f^2}{4} \cdot x^2 - \frac{fgr}{2} \cdot x + \frac{c^2r^2}{4} = 0$, hic vero ad Aream alterius Curvae ita expressae $x^2y^2 - r^2y^2 + \frac{b^2}{4} \cdot x^2 + \frac{r^2b}{2} \cdot x + \frac{r^2}{4}(r^2 - a^2) = 0$, Axi τῶν x non secus ac prima referendae. Hae duo tamen Curvae adamussim conveniunt inter se semel atque vice τῶ x in priori τὸ $r - x$ substituatur. Krafftius itaque nihil longius Varignono progressus est; quinimo Varignonus, etsi multo ante quam Krafftius argumentum idem tractaverit, Krafftium ipsum superavit, quia praeter communis illius Curvae quadraturam ingeniose proposuit ac demonstravit eidem Problemati resolvendo parem arcum novae Curvae ab Evoluta Circuli ortum ducentis, de qua plura scripserat anno M.DC.XCV°. (437). Leibnitius et Eulerus Superficiem Coni circularis obliqui acutissime derivaverant a rectificatione Lineae 6ᵗ. ordinis, Alemberto id fatente (438), quidquid sit de Krafftio *ingentem* valde Lineae ipsius ordinem futurum iri depraedicante (439). Formula ab Alemberto tradita *Elementi* ipsius Conicae Superficiei eandem illam quadraturam Lineae 4ᵗⁱ. ordinis complectitur a Varignono et Krafftio iamdudum productae, nimirum, $x^2y^2 - y^2 + \frac{a^2}{4} \cdot x^2 - \frac{a}{2} \cdot x + \frac{(h^2+1)}{4} = 0$; quam Lineam toto iure *Quadratricem* Coni nuncupare licebit (440). Casus est singularis, neque elegantia carens, ab Alemberto tamen neglectus, quadraturam nempe illius Curvae dum Conus *scalenus* iacens fuerit, a quadratura unius Circuli dependere (441). In Cono iacente fit $h = 0$, et idcirco Aequatio Alemberti convertitur in simpliciorem $y^2 = \frac{\left(\frac{1-ax}{2}\right)^2}{1-x^2}$, unde oritur $\int ydx = \int \frac{(1-ax)dx}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}}$; quod Integrale reapse, uti neminem latet, et iam alibi dictum est in §°. 34ᵗᵒ., ab Arcu vel Area Circuli obtinetur. Conus autem iacens (Figᵃ. 51.) aut verticem habeat in centro baseos O dum *limitem* Coni *recti* designat, aut si *limitem* denotet *scalenorum*, in puncto quolibet interiori ipsius baseos I, aut in eius circumferentia A, Superficie praeditus est semper aequali eidem Circulo baseos $CEADO$; et quaevis pars Sectori centrico aut excentrico

trico *COE* vel *CIE* vel *CAE* par est, quemadmodum cum Elementis congruens Geometriae Formula ipsa demonstrat. Nam $\int \frac{(1-ax)\,dx}{2\sqrt{1-x^2}} =$

$\frac{1}{2}\int \frac{1 \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{a}{2}\sqrt{1-x^2} =$ Sectori *CGEO* + Triangulo *OEI* vel *OEA*, positis ex Alemberto, aut eius interprete Cousino (442), radio $OC = 1$, $OF = x$, *OI* sive tandem $OA = a$. Si vero vertex Coni *obliqui* iacentis, uti *B*, exterior quo ad basin evadat, observandum caute est, ne Formula in falsam abeat propter $OB > OA$ seu $a > 1$, fore τὸ $1 - ax = 0$ in punctis *E* aut D, extremis tangentium baseos a vertice *B* eductarum, deindeque positivum, quem servavit valorem a *C* usque ad *E* vel usque ad *D*, in negativum convertere. Idgenus vitium Formulae ita est emendandum, ut ea sit potius in eius Functionis progressu, post transitum per *E* aut *D* versus *A*, $\int \frac{(ax-1)\,dx}{2\sqrt{1-x^2}} + C$, nimirum $\frac{DHCGEOB}{2} + C -$ $\int \frac{1 \cdot dx}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{a}{2}\sqrt{1-x^2}$, vel $\frac{DHCGEOB}{2} + OEB - EOK - OKB$, aut tandem $\frac{DHCGEOB}{2} + BEK$; videlicet medietas Superficiei Coni iacentis $= BEGCOB + BEKA$, totaque $BEGCHDB + BEKALDB$, sive $2 . IEB + 2 . GOE$, factis arcubus *GC*, *EA* aequalibus inter se. Illa tamen ipsius Formulae permutatio vitio nequidem Algebrae vertenda erit tum quia Radix secunda τῆ $(1-ax)^2 = 1 - ax$ aeque ac $ax - 1$, tum quia quodlibuerit Integrale *constantem* semper subintelligit sui moderatricem, et a Problematis singularibus conditionibus apte determinandam. Ea Linea, quae Area sua Superficiem tribuit Coni *scaleni* iacentis, est 3ii. ordinis, ac signanter *species* 63ia. iuxta enumerationem Newtoni, scilicet *tertius Hyperbolismus Ellipseos* $zyy = -\frac{1}{4} . z + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(2-z)$ dum $a = 1$, seu vertex Coni in *A*, et $z = x + 1$, vel Curvae abscissarum initium in *C*. Haec profecto est Curvae Grandi *Versoriae* (443) analoga, ac sola Parametro differens (nam $zyy = a^2(a-z)$, facto $a = 2$, abit in $zyy = 4(2-z) = b^2(2-z) = \frac{1}{4}(2-z)$ si b fiat $= \frac{1}{2}$, nimirum quaevis Or-

 dinata

dinata *y versoriae* Grandianae, quam *primariam* nuncupabo, quadrupla est *y* ad communem abscissam relatae *versoriae* nostrae *secundariae* aut *contractae*, et idcirco Grandi *versoriae* Area quadrupla nostrae, scilicet quadrupla Circuli genitoris) cuius in quadratura Areae pervestiganda ille admodum desudavit, quam heic facillime ac simplicissime et totam Circulo aequalem et partes Circuli Sectoribus excentricis aut Bilineis Segmentisve ab extremo diametri computatis pares esse uno pene versiculo ostendi (444). Ad Laurentium Lorenzinum Epistolam scripsit Caelestinus Rollius, qua (§§[is]. VIII°. IX°. X°. XI°.) universam *Versoriarum* familiam (445) non multo post Grandum satis iucunde complexus est, oculisque Geometrarum subiecit in Solido circa asymptotam Axemve abscissarum x genito ab Hyperbola *mesolabica* $xyy = a^3$, in quam tandem *Versoriae* desinunt omnes, illud secando ope planorum Axi eiusdem parallelorum, veluti videre licet in Opere eximio, sed minus noto, cui Lorenzinus ipse titulum fecit *Exercitationis Geometricae*, Florentiae edito anno M.DCC.XXI°. post fatum Auctoris. *Versoriarum* harumce et Hyperbolae *mesolabicae* analogia longius etiam porrigitur. Nam ex Theoremate egregio, et pro rotundis Solidis universali, quod Geometris citius, quam poterim, communicabo in meo *Specimine de Lineis Spiricis*, si in Hyperbola Fig[ae]. 52. ducatur a quolibet eius puncto *C* Ordinata *CDE* asymptotae *IHK* parallela, aliaeque quovis numero *BOF*, *AIG*, et in postremis fiant semper $BM.MF$, AN,NG etc. $= CD^2$, erunt puncta *D*, *M*, *N* etc. in *Versoria*. Isthuc ipsum clariter etiam evincitur ab Aequatione Hyperbolae $xy^2 = a^3$. Facta enim Ordinata $CD = b$, necnon vocatis BO, AI etc. $= y$, OH, IH etc. $= x$, MO, NI etc. $= z$, habebitur ex constructione praemissa $(y + z)$ $(y - z) = b^2$, sive $\frac{a^3}{x} - z^2 = b^2$ vel demum $xzz = a^3 - b^2 x$, nimirum Aequatio ad *Versoriam* universalem. Quae constructio non modo confirmat *Versorias* omnes innumeras ita genitas gaudere eâdem asymptota *IHK* Hyperbolae genitricis, sed etiam ostendit necessario *flexum-contrarium* in utroque earundem ramorum inesse ad instar antiquorum Conchoidis, ac fore asymptoticas inter se et quo ad Hyperbolen, veluti ex. gr. contingit Hyperbolis innumeris Apollonianis *similibus*, quas eaedem asymptotae complectantur. In hypothesi praeterea τῶ $a >$ aut < 1 Area Lineae, nunc ordinis 4[i]., suppeditat Superficiem Coni iacentis *obliqui*; quamobrem ea

Curva

Curva Aequatione gaudens $x^2y^2 - y^2 + \frac{a^2}{4}x^2 - \frac{a}{2}x + \frac{1}{4} = 0$ vel potius $x^2y^2 - b^2y^2 + \frac{a^2}{4}x^2 - \frac{b^2a}{2}x + \frac{b^4}{4} = 0$ et *Versoriam* decurtatam illam uti singularem *casum* comprehendit et Lineam alteram praebet quadrabilem in toto ac partibus ope Circuli. Hoc tamen discrimine quod in Hyperbola-circuli §°. 49no. contemplata, atque huic Curvae consimili, Areae partes Sectoribus Circuli centricis Radium habentis, qui duplum possit Radii Circuli genitoris, sint aequales; in nova vero Linea Sectoribus Circuli excentricis. Consequitur ideo ex praemissis Superficiem Cylindri iacentis *scaleni* Rectangulo *dato* parem esse, Coni vero iacentis *scaleni* vel integro Circulo vel excentricis eiusdem Sectoribus. Dum ergo Summa productorum Laterum Coni iacentis *scaleni* per arculos Baseos dependet (ex dictis in I^a^. Sectione) a perimetro *scalenae* Ellipseos Apollonianae, Summa vicissim productorum Normalium ductarum a vertice Coni ipsius super innumeras Baseos Tangentes per arculos eosdem dependet a Circuli peripheria vel *aequilaterae* Ellipseos. Qua in harmonia fusius amplificanda immorari supervacaneum existimo. Unum tamen silentio praeterire nequeo. Totum Alemberti opus concludit Superficiem Coni *obliqui* universaliter obtineri praesidio Arcuum simul Sectionum-conicarum (446) et Areae Lineae 3^ii^. ordinis, quod idem est ac dicere, per §^um^. 47um., praesidio quadraturae simul Lineae ordinis 3^ii^. alteriusque ordinis 4^ti^., dum qui Alemberto praeiverunt Superficiem illam ab unica quadratura Lineae 4^ti^. ordinis dependentem ostenderant. Exinde faciliter intelligitur Superficiem ipsam Coni *scaleni* adnumerari quantitatibus *transcendentibus* superioris ordinis prae Arcubus Conicarum, quemadmodum fusius, subtiliusque disseruit Le Gendre in §°. VII^mo^. *De la Surface du Cône oblique* (pag^is^. 642. 43.) I^ae^. Dissertationis suae, quam recensui in *Adnotatione* 113^ia^., illius nempe ordinis, quo Integralia plura innituntur a Bougainvillio pertractata in Partis I^mae^. etc. Capite XVII^mo^., sic universaliter expressi $\int d\varphi \sqrt{b^2 + (a - c\, Cos.\, \varphi)^2}$. Alembertus idem quodam in loco adseruit, excepto unico casu Coni *recti*, mensuram Conicae Superficiei a quadratura Lineae 3^ii^. ordinis dependere (447), oblitus fortasse (nedum Coni iacentis) Arcuum Sectionum-conicarum vel quadratura etiam

Lineae ordinis 4^ti^. Ubi agit de Cono Elliptico (448), eius Superficiem determinat ope Formulae generalis

$$\int \frac{-dx\sqrt{b^2\left(a^2+\left(\frac{e^2}{a^2}-1\right)x^2+\left(ea-\frac{eex}{a}\right)^2\right)}}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$, positis e, a Semiaxibus Baseos *coniugato* et *transverso*, b Coni altitudine, c distantia ichnographiae verticis a centro Baseos ipsius, ac tandem x abscissa centrali. Si *scalenus* fuerit, prolixiori quam par erat calculo adfirmat (449) ab unica pendere Circuli quadratura Superficiei Conicae dimensionem statim atque *obliquus* Conus Ellipticus frustum efficiat aut partem sectam a Cono *recto* Circulari. Veruntamen ad hoc adstruendum innixus fuit Alembertus Theoremate Isaaci Barrowii, quod exstat in *Lectionum* eius *Geometricarum* XII^a^. Londini editarum anno M.DC.LXIX°. (450), ab eodem Alemberto in calce Vocabuli *Cône* Parisiensis *Encyclopediae* memorato. Brevior autem, clariorque perinsignis huiusce Coni Elliptici proprietatis concinnari poterat demonstratio dum prae Theoremate Barrowiano illud potius eligeretur ab Ioanne Bernoullio traditum in *Actis Eruditorum Lipsiensibus* anni M.DC.XCVI^ti^. (451), quo statuit partem quamlibet Superficiei Coni *recti* circularis (veluti Coni illius *obliqui* elliptici Superficies) ad sui ichnographiam (nempe in eo casu ad Aream Circuli vel Ellipseos conicae) semper esse in data ratione Lateris Coni recti ad Radium Baseos. Ipsemet Alembertus in §°. V^to^. ait (452) Integrale

$$\int \frac{-dx\sqrt{b^2a^2+e^2a^2-2ce^2x}}{\sqrt{a^2-x^2}}$$ a rectificatione Circuli consequi dum $b^2a^2+e^2a^2-2ce^2x = m(a-x)$, videlicet dum Integrale illud convertatur in $\int \frac{-dx\sqrt{m(a-x)}}{\sqrt{a^2-xx}}$, aut $-\int \frac{\sqrt{m}\,.\,dx}{\sqrt{a+x}}$, quod e contra non a Circuli rectificatione obtinendum fore omnes norunt, sed algebraicum et absolutum esse Integrale $C-2\sqrt{m(a+x)}$. Undenam Alembertus in hunc inciderit scopulum equidem nescio, quum paullo supra in §°. II°. apte dixerit (453) Superficiem Coni Elliptici a rectificatione Circuli impetrari quando Formula universalis abeat in $\int \frac{-dx(R+Sx)}{\sqrt{a^2-x^2}}$; quae

forma

forma ab altera §[i]. V[ti]. maximopere abludit. Superficiem denique Coni Elliptici recti quum Alembertus ostenderit (454) parem Superficiei Cylindri Elliptici *recti*, cuius Axis vel Latus $= \frac{\sqrt{b^2 + e^2}}{2}$ (455) sive dimidio *minimi* Laterum Coni *dati*, Basis autem sit Ellipsis conica praedita Semiaxibus a, $\frac{e\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{e^2 + b^2}}$, nemo non videt inter Conos Cylindrosque iucundissimam analogiam effulgere. Nam quemadmodum Coni *recti* circularis Superficies in eam Cylindri *recti* circularis converti potest ex Elementis, aut in Summam productorum Rectarum Circuli centricarum per arculos, ita Coni *recti* elliptici Superficies in eam Cylindri circularis *scaleni* convertitur, et vicissim, vel quod eodem redit, in Summam productorum Rectarum Circuli excentricarum per arculos ex doctrina Pascalii. Nec pauca admiratione dignum est, meo saltem iudicio, unum eorum Semiaxium a eundem manere, alterum vero ita esse compositum, ut sit ad *coniugatum* e Basis ellipticae Coni *dati* in proportione $\sqrt{a^2 + b^2} : \sqrt{e^2 + b^2}$, seu *maximi* ad *minimum* Laterum eiusdem Coni, non secus ac passim in I[a]. *Sectione* de Pascalii Theoremate praedicavimus. Ceteri diversarum quarumcunque a Circulo Basium praediti Coni ante omnes, si recte meminerim, animadversi fuerunt ab Isaaco Barrowio in *Lectionum* praecitatarum pag[is]. 117[ma]. 118[va]. sub titulo *Conicorum superficies dimetiendi methodus*, quo loci exemplum prodidit etiam, tametsi alienum, in Fig[a]. 177[ma]. Superficiei conicae *scalenae*, eiusque partium Hyperbolam aequilateram Apollonianam pro Basi habentium geometrice *quadrabilium*.

55. Analogia quoque ista ulterius progreditur, novaque, nec minus admiranda, patefacit. Quamvis Cylinder et Conus *scaleni* Corpora geometrica sint adeo inter se discrepantia, ut eae, quas nunc collecturus sum, proprietates utrisque communes, impossibiles ferme videri debeant, nihilo tamen minus alacri animo ad has demonstrandas adgredior, tum quia inventa Pascalii, quae mihi potissimum illustranda proposui, faciant locupletiora, tum quia illa omnia, quae sequentur, Geometriae deliciis rarioribus sint iure optimo adnumeranda. *Nova Acta Eruditorum Lipsiensia* anni M.DCC.XXXIV[i]. inter Problemata Neapolitana ad Collectores ea tempe-

state

state transmissa illud habent I^um. (455) *Ex Cylindro super basin dati Coni scaleni perpendiculariter erecto abscindere portionem, cuius superficies ipsius Coni superficiem adaequet*. Si coniectationi locus fuerit, censeo Scriptorem Neapolitanum Robervallii deperditam de Superficie Coni *obliqui* investigationem, cuius supra memini, post elapsum saeculum restituisse (456). Quamvis etenim demonstratio, quae in praedicto exstat *Eruditorum Diario*, involuta et prolixa nimium sit, non modo eam ad Robervallii mentem componere parvi laboris existimo, verum etiam alteram imitari a Robervallio ipso traditam, et initio §'. 15^ti. a me concinnatam, qua Superficiei Cylindri *scaleni* partem Superficiei Cylindri *recti* aequalem constituit. Hac porro imitatione innititur analogia illa, necnon intimum foedus Cylindrorum atque Conorum, quod erat hactenus in desideratis. Expedit autem rem omnem synthetice prosequi. Ac primum sit Conus *obliquus* $DRBZG$ in Fig^a. 53., cuius altitudo DR cadat in R punctum Baseos peripheriae, qualem animadvertere iamdudum placuit Pascalio (457), in quo si a puncto eodem R ducantur normales RM, RN etc. ad tangentes AMS, BNT etc., aliaeque ad diametrum Baseos BQ, AP etc., erunt semper priores normalium RN, RM etc. pares abscissis aut Sinubus-versis RQ, RP etc. Nam a centro C emissis CI, CO etc. tangentibus parallelis, sunt triangula orthogonia CBQ, CRI, necnon CAP, CRO etc. similia et aequalia; quamobrem $RI = CQ$, unde $RN = RQ$, pariterque $RO = CP$, nimirum $RM = RP$ etc. Interea patet ex ipsa demonstrationis huiusce methodo fore etiam $BN = BQ$, $AM = AP$ etc., cuius perpetuae aequalitatis in §°. 57mo. proderit meminisse. At perpendiculares a vertice Coni ductae DN, DM etc. ad ipsas tangentes (ex Elementis) possunt Summas Quadratorum $DR^2 + RN^2$, $DR^2 + RM^2$ etc. Igitur poterunt etiam $DR^2 + RQ^2$, $DR^2 + RP^2$ etc. Dum ergo centro R, ac Semiaxe RD describeretur Hyperbola aequilatera $DD'D''D'''$, quaelibet eius Ordinata PD', QD'' etc. par esset DM, DN etc., quum ex natura Curvae sit $PD'^2 = DR^2 + RP^2$, $QD''^2 = DR^2 + RQ^2$ etc. Sed Coni Superficies est Summa productorum Arcuum Baseos infinite-parvorum per semisses Normalium DR, DM, DN, DZ etc., ac Linea transiens per puncta E, F, Y, X etc. Ordinatas praedictas bifariam secantia est ex Elementis Conicorum Hyperbola *scalena* $EFYX$ eodem centro R praedita, Semiaxe *transverso* $RE = \frac{DR}{2}$, ac *coniugato* =

2RE

$2RE = DR$. Itaque ea portio Superficiei *recti* Cylindri, quae super Planum $DRZK$ communi eius Basi et *dati* Coni perpendiculare habeat ichnographiam $RZXYFE$, adaequabit Superficiem *dati* Coni *scaleni*. Constructio graphica Hyperbolae illius *scalenae*, quum facillime consequatur ab Hyperbola aequilatera, non secus atque Ellipsis a Circulo (458), obtinebitur ope fili atque ponderis alligati ea methodo, ac lege, qua Guido Grandus usus fuit in *Constructione novi expeditissimi Mesolabi* anno M.DCC.XXVIII^{vo}. Florentiae vulgata (459), ita ut, si producta altitudine Coni *dati* RD usque in Ω donec evadat $R\Omega = DZ$ laterum *maximo*, statuatur deinde $\Omega\Phi = DR$, seu $D\Phi = \Omega R = DZ$, eique normalis fuerit indefinita $\Omega\Pi$, filum ΦD cum pondere in D, manens in puncto Φ, et stilo admoto per $\Omega\Pi$ incedens, veluti in Ψ, Γ etc., ponderis ipsius centro aequilateram Hyperbolam $D\,D'\,D''\,D'''$ etc., cuius supra mentio facta, describet. Quod valde elegantius videbitur iis, qui meminerint eâdem methodo describi posse Curvam Cyclocylindricam *primariam* in Superficie Cylindri *recti*, hoc tantum discrimine, quod heic Semiperipheria Circularis ac Semicirculus subeant vice Lineae rectae $\Omega\Psi\Gamma D'''$ ac Trianguli $\Phi\Omega D'''$ orthogonii, quemadmodum in Capite VIII°. mei Tractatus *Magnitudinum Exponentialium etc.* ostendi (460). Istud vero hactenus inauditum non modo analogiam intimam Hyperbolae et *primariae* Cyclocylindricae Robervallii patefacit, sed etiam Cylindri et Coni *scalenorum*, de quo argumento potissimum loquor. Ut ceteros Conos *obliquos* brevius et unico Schemate 54. complectar, Conos omnimodos KMA, KGA, KQA, rectumque ipsum KPA super eandem Basin $ALKR$ erectos animadverto, hac etiam mente, ut eos praesertim invicem comparem. Dum altitudo Coni *dati* MI cadat intra Circulum Baseos, liquido constat, repetita superiori ratiocinatione, et a puncto quoque I, praeter A, ductis normalibus ad tangentes, fore $IC = \frac{OI}{OA} \cdot AB = \frac{OI}{OA} \cdot OS$, $IC' = \frac{OI}{OA} \cdot AB' = \frac{OI}{OA} \cdot OS'$ etc., ideoque $IN = OA - \frac{OI}{OA} \cdot OS$, $IN' = OA - \frac{OI}{OA} \cdot OS'$ etc., vel ab extremis ordinatae RIL emissis tangentibus RT, LT donec simul occurrant protractae diametro Baseos, $IN = OA - \frac{OA}{OT} \cdot OS = \frac{OA}{OT} \cdot TS = \frac{OI}{OA} \cdot TS$ ex Elementis, $IN' = OA - \frac{OA}{OT} \cdot OS' = \frac{OA}{OT} \cdot TS' = \frac{OI}{OA} \cdot TS'$ etc. Exinde oritur

tur semisses perpendicularium a Coni vertice M super tangentes Baseos emissarum ita exprimi, ut earum Quadrata sint $\frac{OI^2}{4OA^2} \cdot TS^2 + \frac{MI^2}{4}$, $\frac{OI^2}{4OA^2} \cdot TS'^2 + \frac{MI^2}{4}$ etc., nimirum ex Conicis esse Ordinatas ad Hyperbolam Apollonii secundo Axi relatam $XYZ\Phi$, cuius *transversus* Semiaxis fuerit $\frac{MI}{2}$, semis altitudinis Coni, *coniugatus* vero ad *transversum* rationem habeat $2OA : OI$, mirabili quidem consensu cum praecitatis *Lipsiensibus Actis*. Si autem altitudo QI cadat extra Circulum Baseos, ductis a puncto T tangentibus ad ipsius Circuli peripheriam TL, TR, iunctisque contactibus ope ordinatae LIR, eadem Hyperbola, quae uni ex Conis satisfacit dudum contemplatis KMA, Cono etiam inservit KQA propter $OI : OA$; $OI \div$. Quod ut fiat, et faciliter fiat, Hyperbola prima $\Pi XYZ\Phi$ retrocedat necesse est sibi semper parallela per intervallum $TI = X\Omega = QM$ distantiae verticum, et positionem adquirat $\Lambda V\Omega\Psi\Sigma$. Quemadmodum itaque in prima hypothesi pars illa Superficiei *recti* Cylindri, quae super Planum $AGEK$ communi Basi normale ichnographiam habeat supremi marginis sui duplici *curvedine* praediti Hyperbolae frustum $YZ\Phi$, adaequat ex demonstratis Superficiem Coni *scaleni* KMA, ita eiusdem Cylindri pars ichnographia gaudens in altero ipsius Hyperbolae frusto $V\Omega\Psi\Sigma$ par est alterius Coni *scaleni* KQA quaesitae Superficiei. Conus ergo verticem habens extra basin suam comite semper gaudet altero Cono verticem intra basin habente, et vicissim, quorum utriusque Superficiei mensura ab eâdem dependet Hyperbola Apolloniana. Recurrit ergo pro punctis analogis T, I etc. ipsamet elegantissima adfectio, quam de Conis iacentibus aut erectis, et de Cylindris *scalenis* sive doctrina Pascalii disserens in §§^is^. 7°. 8vo. 13^io^. etc. fusius exposui. Omnes illas Hyperbolas qui secum ipso volutet, multa colliget Corollaria. Primum namque admiretur necesse est Curvae verticem X extra Conum positum esse dum altitudo MI intra Conum fuerit, et ex adverso Ω intra Conum quum altitudo istius extra Conum. Quo magis vertex Q a vertice G prioris Coni KGA recesserit, eo magis vertex Ω Hyperbolae ad axem PO Coni *recti* KPA adcedet, et vicissim quo magis vertex M ab eodem vertice G distans fuerit, eo magis vertex X Hyperbolae ab axe PO removebitur. Postremo hocce

casu

casu *paradoxon* quiddam enascitur. Nam vertice M incidente in P, punctoque I in centrum baseos O, punctum alterum T abest in infinitum, fitque Hyperbola huiuscemodi, quae pro Semiaxe *transverso* habeat dimidium altitudinis PO Coni *recti*, pro *coniugato* autem alia recta, quae sit ad $\frac{PO}{2}$ veluti $KA : 0$ ex praemissis, ideoque longitudinis infinitae. Videretur ergo plerisque Geometrarum, quos non raro Infiniti maiestas in errores rapit perinsignes, Hyperbolam in Lineam rectam tum se convertere aequidistantem secundo Axi $T'TAK$, eodemque intervallo ab eo Axe dissitam $T'X' = TX = I\Omega = K\beta = \frac{PO}{2}$, quum universae Hyperbolae Conis omnibus *scalenis* aeque altis superius animadversis pertinentes eodem gaudeant Axe *transverso*, illarumque Centra in eâdem Recta $X'X\Omega\beta$ disposita sint ex iam demonstratis. Quod si unquam verum fuerit, Superficies Coni *recti* KPA aequalis esset semissi Superficiei *recti* Cylindri, iisdem cum illo Basi et Altitudine praediti, contra Archimedem. Ad hunc nodum solvendum perducit consideratio rite instituta Hyperbolae illius, quae verticem habeat in X', infinite remotum ab Axe PO; quumque Ordinatarum Quadrata infinitis Abscissis $T'S'$, $T'S$ etc. respondentium debeant esse $\frac{OI^2}{4OA^2} \cdot T'S'^2 + \frac{PO^2}{4}$, $\frac{OI^2}{4OA^2} \cdot T'S^2 + \frac{PO^2}{4}$ etc., sintque nunc $OI \cdot T'S'$, $OI \cdot T'S$ etc. $= 0 \cdot \infty = OA^2$ ex §°. 49mo., nemo non videt earum Ordinatarum Quadrata pro casu Coni *recti* se vertere in $\frac{OA^4}{4OA^2} + \frac{PO^2}{4}$, sive $\frac{OA^2 + PO^2}{4}$, sive $\frac{PA^2}{4}$, et ideo (quidquid sit de Hyperbolae initio penes Verticem X', Centrumque T' infinite distans ab O) frustum illud Lineae in plano iacens $AGEK$ erit Recta $\delta\mu$ parallela diametro AK, atque ita posita, ut $K\delta = \frac{PA}{2}$, aut semissi Lateris Coni, quod perfecte congruit Geometriae. In hypothesi praeterea alterius *limitis* Conorum omnium *scalenorum*, quum nempe vertex Q, eâdem altitudine servata QT', in infinitum abeat, *casus* oppositus oculis obversatur. Hoc in *casu* extremo Hyperbolae frustum evadit Recta $\nu P\gamma$ longitudinis infinitae propter superius demonstratam proportionem Semiaxis *coniugati* ad *transversum* $2OA : OT' = 0 : 1 = 1 : \infty$; et re quidem vera Conica Superficies tum respuit dimensionem finitam. Iucundissima pro-

fecto est contemplatio Hyperbolarum sine numero, quarum frusta originem praebent innumeris, ac diversimode inclinatis Curvis *duplicis curvaturae* in eâdem Superficie Cylindri *recti* depictis, quas alibi illustrandas mihi proposui (461). Sed prae ceteris monendum puto in universis Conis *obliquis*, quarum altitudines aut intra Basin cadunt, veluti *KMA* etc., aut in extremo Baseos prouti *KGA*, perpendicularium a vertice super tangentes Baseos ductarum *minimam* fore Latus *minimum* Coni *MA*, *GA* etc., *maximam* Latus *maximum* Coni *MK*, *GK* etc., dum e contra secus accidit Conis, uti *KQA* etc., quorum altitudo cadat extra Circulum Baseos. Nam in hisce omnibus, quum vertex Hyperbolarum Ω etc. positum sit intra Rectangulum *AGEK*, hinc oritur geminam esse perpendicularium *minimam*, quarum utraque Sinui-verso Baseos *AI*, aut Arcubus *AR*, *AL* conveniat. Hae autem geminae perpendiculares ex Elementis in unam coalescunt *QT*. Intersectiones vero Hyperbolarum, ex. gr. *H*, Γ etc., tam ostendunt nunquam contingere posse perpendicularium aequalitatem in Conis *KGA*, *KMA* etc., quam reapse contingere pro Sinu-verso *AS'* etc. in Conis *KGA*, *KQA* etc. Cetera linquo libenter, ac potissimum evidentissimam adfectionem, quae a dudum ostensis fluit sponte sua, nimirum esse $\theta N = OC = \frac{OI}{OA} \cdot \theta S$, $\vartheta N' = OC' = \frac{OI}{OA} \cdot \vartheta S'$ etc. etc., ut praecipuum eius, quod tracto, argumenti decus exponam. Quemadmodum enim perpendiculares antea dictae cuiusque Coni *scaleni* ad *Locum* sunt Hyperbolicum, sic etiam Latera eiusdem Coni, nimirum ex Pascalio et §°. 13^{io}. ac 15to. perpendiculares ad tangentes Baseos Cylindri *scaleni*, ad *Locum* sunt Parabolae Apollonianae. Proponatur namque Cylinder *scalenus* quicumque in Fig^{a}. 55ta. *ABCE*, cuius Axis *FG*. Habemus in §°. 15to. methodum facilem a Robervallio traditam abscindendi ex Cylindro *recto* *EIFHOLMN* ductu circini *FG* portionem huiuscemodi, ut non secus ab eo, quod effecimus pro Cono *scaleno*, adaequet integram Superficiem *obliqui* Cylindri. Linea *duplicis curvaturae* Cyclocylindrica, quae marginem supremum constituit abscissae Cylindricae Superficiei, ichnographia gaudet super Planum *XFLNEZ*, quae composita sit duobus frustis *PQG*, *RST* eiusdem Parabolae conicae *PGDRT*, cuius vertex *D* invenitur ope rectae *GD* perpendiculariter ductae super *datam* *FG*, parameter autem est semper Recta constans *EF*, aequalis Radio Baseos Cylindri *dati* scaleni.

Nam

Nam ex l. c. quaevis Ordinata $Y\Phi, Y'\Phi'$ etc. potest Summam Quadratorum $EK^2 + EG^2, EK'^2 + EG^2$ etc., scilicet ex constructione $FE . EY + FE . ED$, $FE . EY' + FE . ED$, aut $DY . FE$, $DY' . FE$ etc: quamobrem $Y\Phi^2 = FE . DY . Y'\Phi'^2 = FE . DY'$ etc., quae proprietas *localis* est memoratae Parabolae. Quomodocumque igitur magis aut minus *obliqua* fuerit Superficies Cylindrica, eadem semper manet Parabola, sed frusta ichnographica minus magisve remota sunt ab eius Curvae primo vertice, et idcirco magis minusve inclinata ad Axem recti Cylindri; adeo ut Parabola unica plus aut minus promota (et sibi ipsi asymptotica) suo vertice super rectam $FE\Upsilon$ Cylindris *scalenis* innumeris satisfaciat. Quid simile vidimus etiam in Hyperbolis Fig^ae. 54^tae. $XYZ\Phi$, $\Lambda\Omega\Psi\Sigma$, veruntamen pro geminis tantum Curvis, dum hic pro universis. Vertex D cadit in E, duoque frusta eiusdem Parabolae dudum animadversae in Parabolam *continuam* vertuntur $\beta\mu E\nu\nu$ dum Cylinder *scalenus* fiat iacens, sive in limite *maximae* obliquitatis; quod congruit Guidonis Grandi Theoremati, ubi egit de ichnographia *primariae* Cyclocylindricae usque ab anno M.DC.IC^no. in *Geometrica Demonstratione Vivianeorum Problematum* (462). Cylindro *scaleno* in rectum permutato, scilicet opposito in *limite minimae* obliquitatis, fit GD parallela ad FE, et ideo Parabolae vertex D infinito ab E versus Υ distat intervallo, frustumque Curvae GQP abit in rectam aequidistantem diametro Baseos EF, quomodo iubet Euclides. Parabolae Apollonii sunt etiam ichnographiae Cyclocylindricarum Laloverae in eodem §°. 15to. explicatarum; sed diversa Parametro praeditae. Sunt enim quo ad *primariam* Cyclocylindricam vel *protractae*, vel *contractae*, adeo ut Yy^2 sive $Y\varpi^2$ ad $Y\Pi^2$ etc. eandem ubique servet proportionem, ex quo fit tam $Ey\Xi$, quam $E\varpi B$ Parabola, eodem vertice gaudens E Parabolae praecipuae $E\Pi\beta$, ipsam tangens exterius interiusve, parametrumque habens, quae sit ad EF in ratione *data* τῇ Yy^2 vel $Y\varpi^2$ ad $Y\Pi^2$. Cuncta haec Cylindris praeterea quomodolibuerit *scalenis*, at eadem semper altitudine ac basi praeditis veluti praecedentes Coni in Fig^a. 54ta., aptari facile possunt. Dum etenim Cylinder *obliquus* fuerit $A\varphi\chi E$ cum Axe FG', sintque $G'\vartheta L$, $Z\phi X$ frusta Parabolae ichnographicae, cuius primus vertex D', parameter EF, ex praemissis invenienda, sive Parabolae $\beta\Pi E\nu\nu$ promotae per ED', neminem latet (§. 20.) Ordinatas ichnographiae illius aY, bY' etc. secari

cari semper debere in c, d etc. uti $G'E$ in G, quo facto obtinetur tam frustum Gk, quam alterum $R\lambda$ alius Parabolae conicae, eundem verticem D' habentis, parametrumque, quae sit ad EF ut $G'E^2:GE^2$. Postrema haec frusta ea sunt, a quorum margine perpendiculares innumerae erectae determinant portionem Superficiei in Cylindro *recto* $EIFHOLMN$ parem toti Superficiei $EA\Theta\Delta$ Cylindri *scaleni* eâdem altitudine GE praediti cum $EABC$. Idem itaque sermo recurrit uti supra de ichnographiis Cyclocylindricarûm Laloverae a *primaria* derivatarum. Sed nullus finis adesset si omnia pervestigare, numerisque omnibus absolvere in animo haberem.

56. Conorum, ac Cylindrorum *scalenorum* intimum foedus nunquam magis elucet, quam in ea Curva, in qua puncta omnia locentur occursuum Tangentium Baseos et Perpendiculatium a Coni vertice, vel a peripheria supremae Baseos Cylindri super illas innumeras eductarum. Nam eandem invenio Lineam tam in Cylindris, quam in Conis *obliquis*, talemque invenio, quae sit Aequationis Linearum Persei singularis *casus*, ac fortasse celebrior. Qui §um. 1um. initio huiusce Tractatus expositum rite calluerit, puncta Lineae quaesitae hac simplicissima constructione sibi in Cylindro *scaleno* repraesentabit. Promoveatur Circulus *datus*, qui Centro B praeditus Basis fuerit Cylindri *scaleni*, $AF'DK$ (Figa. 56ta.) per eius diametrum ABD, si oporteat protractam, (communem sectionem Baseos, ac Plani per Axem transeuntis, quod perpendiculariter Basi insistat) tanto adamussim intervallo $AG = BC = DE$, quanti opus est ut hoc intervallum adaequet Sinum-rectum obliquitatis Cylindri, eius Latere assumpto pro Radio, vel Sinu-toto. Deinde a Centro C promoti Circuli ducantur ad Tangentes innumeras FL, $F'L'$ etc. Circuli promovendi perpendiculares CH, CH' etc.; punctaque H, H' etc. erunt in Curva quaesita. Nam coniunctis FG', $F'G''$ etc., necnon BF, BF' etc. tum ob BF, CG' aut BF', CG'' etc. invicem aequales et parallelas, utpote Tangentibus FL, $F'L'$ etc. simul normales, tum ob FG', FG'' etc. quae consequuntur aequales $BC = AG$, nemo non videt puncta H, H' etc. hac inita constructione Lineam determinare, quam quaerimus. Idem dicas de punctis H'', H''', H'' etc. ope perpendicularium investigandis ab eodem *foco* C ductarum CH'', CH''', CH'' etc. super Tangentes $F''L''$, $F'''L'''$, $F''L''$ etc., quae puncta in eâdem semper directione sunt cum G''', G'', G^v etc. ex hactenus demonstratis: idem de altero

altero Curvae ramo *AMD* eàdem constructione simplicissima describendo, quo Linea quaesita fit in se rediens, ac *cuspide* in *D* punctove *regressus* ornata, aut penes *D* *nodata*, aut tandem *contrariis flexibus* utràque ex parte distincta, visibilibus vel occultis (*points du serpentement*) quemadmodum Mathematici norunt.

57. Facilior etiam constructio institui poterit ipsius Lineae semel ac oculis obiiciantur *similia* Triangula *BFI*, *G'FH* aut *BF'I'*, *G''F'H'* etc., a quorum consideratione oritur esse tam *FH* ad *FI*, quam *F'H'* ad *F'I'* etc., nimirum partes tangentium secandarum ad Sinus-rectos arcuum *AF*, *AF'* etc. Circuli *dati* in ratione constanti τῆ *BC*:*BA*. Hanc Lineam primus omnium, quod sciam, Antonius Parentus methodo ista posteriori descriptam, sed sola in hypothesi $FH = FI$, $F'H' = F'I'$ etc., Mathematicis contemplandam proposuit usque ab anno M.DCC.V°. in Parte III[a]. Voluminis I[mi]. Lutetiae-Parisiorum in lucem editi Collecsionis Physico-mathematicae, cui titulum fecit *Recherches de Mathematique et de Physique etc.* (463). Veruntamen nec ea tempestate, neque in secunda Operis ipsius editione locupletiori, quae contigit anno M.DCC.XIII[io]. (464), illius naturam *geometricam*, nullamque eius proprietatem, aequationemve explicavit, quum *mechanice* tantum ipsam consideraverit, idoneamque aut aequabiliter elevando embolo in Antliis, aut versatilibus *sublicíisve* Pontibus aequilibrandis (465). Multominus illam Curvam a Cylindro vel Cono *scaleno* originem ducere suspicatus est unquam, nec totam complexus est, sed partem eius tantummodo *H''H'''H''D* uni Quadranti Circuli respondentem. Innumerae porro ab eodem Circulo genitore (Fig[a]. 57[ma].) dimanant Lineae eandem componentes familiam, et ad eundem Axem *AD* spectantes. Si Tangentium quaevis *BC*, *B'C'* etc. Sinui-recto *BG*, *B'G'* etc. aequalis fuerit, Curvam *primariam* nuncupabo; si *BE* : *BG*, *B'E'* : *B'G'* etc. sint in ratione qualibet *data* minoris inaequalitatis, Curvam *protractam*; si contra *BF*:*BG*, *B'F'*:*B'G'* sint in ratione qualibet *data* maioris inaequalitatis, *contractam* adpellare, aut postremarum alterutram *secundariam* nominare licebit. Universae istae Lineae cognatae quodammodo sunt celeberrimae illius Spiralis, quam *Circuli Evolutam* passim vocant Geometrae, primusque inlustravit Varignonus usque ab anno M.DC.XCV°. (466), deindeque vertente anno (ni fallor) M.DCC.XLVIII°. praestantissimus Dionysius Diderotus (467), antequam Eloquentiae philoso-

losophicae illecebris raptus (heu! fatum) sublimiori Mathesi ferias dixisset. Hanc autem *Circuli Evolutam* tam *ordinariam*, quam *contractam* seu *protractam*, ex ipso etiam Cylindro genitam contemplari nullus vetat. Quemadmodum enim enascitur a Cylindro *scaleno* Linea illa occursuum Perpendicularium, Baseosque Tangentium, ita hanc ab occursubus Tangentium Helicis Apollonianae (aut semirecto angulo, aut quocumque alio inclinatae) super Cylindrum *rectum* descriptae (468), eiusque Baseos Tangentium primam originem ducere dixerim. Quod Fig^a. 58va. adeo luculenter demonstrat, et Cochleae illius (469) natura nobis suadet, ut tempus terere frustra censuerim si praeter nudam enunciationem quaedam addere in animum inducerem meum. Dum Helix *primaria* fuerit, vel potius *primaria* Cyclois super Circulum suum genitorem *orthogonaliter* erecta, scilicet $BP'' = CP''$, $AD = CP''D$ etc., Curva $CI'''I'$ erit procul dubio vera *Evoluta Circuli*: protractae autem Helici, in qua $B'P'' > CP''$, $A'D > CP''D$ etc., *Evoluta Circuli* eadem respondebit, non secus atque si Helix contracta fuerit, nempe $B''P'' < CP''$, $A''D < CP''D$ etc. Nam istae etiam Helices *secundariae* Cycloidum ad instar *protractarum*, *vel contractarum* super Circulos *orthogonaliter* erectarum considerari debent. Tangentibus vero proportionaliter sectis, sive productis Evolutae Circuli innumerae *secundariae* $COO''O^{v}$, $CSS''S^{v}$ etc. facile oriuntur. In hoc igitur tantum differunt Lineae istae *transcendentes* ab *algebraicis* primitus contemplatis, quod in hisce Tangentes Circuli, a quibus enascuntur, proportionales sint Sinubus-rectis $P^{iv}L''$, $P'''L'''$, $P''L''$, $P'L'$, PL etc., in illis vero Arcubus CP^{iv}, CP''', CP'', CP', CP etc. ad Sinus eos pertinentibus.

58. Sed Curvae ipsae in Fig^a. 57. depictae considerari alio modo etiam possunt veluti Ungulae forent Cylindri *recti* vel *primariae* vel *secundariae*, quarum erectae Ordinatae super Baseos Tangentes dispositae sint; quod et de *Evolutis Circuli* aut *primariis* aut *secundariis* relatione habita ad Cochleas Cylindricas eodem iure intelligi debet. Consimile quiddam de Ungularum transformatione oculis Geometrarum subieci in §. 16to., at Ordinatis ad normam positis in eodem Plano quo ad Sinus-rectos; atque hac in hypothesi Ellipsis conica transversim descripta generatur. Nunc Ordinatas Radiis Baseos normales effingo, atque huiusce iacentis Ungulae novae, quam *tangentialem* inposterum nominabo, praecipua symptomata complectar synthetice. Primum de Area disserendum. In *primaria*

maria quidem liquido constat Sectores infinite-parvos CIT, BOB' *similes* esse, et idcirco $IC = BG : CT :: OB : BB' :: BG : BS$. Eapropter $CT = BS$, Sectorque $CIT = CIC'$, sive Elementum Ungulae *tangentialis* aut Lunulae deformatae, aequale semissi τῷ $GBSG'$ aut $GBB'G'$ Elementi Semicirculi genitoris. Est igitur non modo Area Ungulae *tangentialis* $ACC'DMA$ par medietati Semicirculi $ABB'MDA$, verum etiam quaelibet eius pars ABC a tangente quavis BC abscissa aequalis dimidio Areae ABG Segmenti Circuli subiacentis. Tota ergo Area Curvae sesquialtera est Circuli genitoris inscripti, eiusque medietas ab Axe AD determinata Semicirculi pariter sesquialtera. Exinde fluit synthesi geometrica duce ac summa facilitate demonstratio illius Theorematis perinsignis, quod ad τὸ $\int d\varphi\,(Sin.\,\varphi)^2$ determinandum refertur. Vocatis enim in *dato* Circulo Radio $OB = 1$, et Arcu $AB = \varphi$, oritur BS ex praemissis $= d\varphi\,.\,Sin.\,\varphi$, atque $BG\,.\,BS = d\varphi\,(Sin.\,\varphi)^2$ $= d(ABG) = d(AOB) - d(BGO) = \frac{d\varphi}{2} - d\left(\frac{Sin.\,\varphi\,.\,Cos.\,\varphi}{2}\right)$; et idcirco

$$\int d\varphi\,(Sin.\,\varphi)^2 = \frac{\varphi}{2} - \frac{Sin.\,\varphi\,.\,Cos.\,\varphi}{2} \text{ (vel potius } = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\,Sin.\,2\varphi)$$

(vid. pag. XX.), quemadmodum Eulerus, aliique invenerunt (470). Neque Areae Ungularum *tangentialium* derivatarum, vel *protractae* vel *contractae* sint, maiorem pariunt difficultatem. Elementa enim homologa $IFF' = IFT''$, aut $IEE' = IET'$ sunt (singula singulis comparando) ad Elementum *primariae* $ICC' = ICT$ in ratione constanti sive *determinantis* duplicata, videlicet $IF^2 : IC^2$ aut $IE^2 : IC^2$, quo posito Arearum partes a tangentibus quibuslibet rescissae IF, IE, et Areae totae a quadratura Circuli dependebunt. Quinimo, si super eodem Axe ac diametro genitoris Circuli AD, et alio Axe PY vel NX, qui sit ad AD *datum* magnitudine ac positione in ratione *data* τῶν $BF^2 + 2BC^2 : 3BC^2$, sive $BE^2 + 2BC^2 : 3BC^2$, describantur Ellipses Apollonianae, erunt partes Arearum vel Areae omnes, uti supra in computationem actae, partium Ellipsium conicarum cum illis Axibus descriptarum ARG vel AQG, aut integrarum Ellipsium $APDY$, $ANDX$ sesquialterae. Accidit itaque isthuc ipsum, quod dudum in §. 49na. contemplati sumus de *Hyperbolarum-circuli* familia, necnon in §. 12mo. de omnimodis a Circulo genitis Cycloidibus. Haec autem posterior similitudo una cum aliis minoris pretii adfectionibus longius promo-

veri

veri non meretur, eoquod ex inferius dicendis nostrae istae Lineae nihil aliud sint quam Epicycloides a tot tantisque Geometris pertractatae (471). Dicam potius de quodam *maximo* elegantissimo Ungulae cuiuslibet *tangentialis*, de illo, nimirum, ac gemino, et *similiter* posito perimetri Ungulae puncto inveniendo, in quo maxime omnium recedat ab Axe (472), vel Tangentes sint eidem Axi parallelae, non secus ac in aliis Ungulis iacentibus §[i]. 16[ti]. supra confecimus. Hoc inventum parvi quidem moliminis est in Linearum harumce *primaria* $ABCD$ Fig[ae]. 59[nae]. Nam Ordinata quaelibet BT, CT' etc. constat ex $ST = IH$ aut $S'T' = I'H'$, et $BS = HP$ aut $CS' = H'P'$, nimirum ex $IH + HP$, vel $I'H' + H'P'$, quarum Summa ut *maximum* fiat, oportet *maximum* reperire Rectangulorum $DO(IH + HP)$, $DO(I'H' + H'P')$ etc., sive $DO \cdot IH + OH \cdot IH$, $DO \cdot I'H' + OH' \cdot I'H'$ etc., aut denique $DH \cdot HI$, $DH' \cdot H'I'$ etc. *Maximum* vero horumce Rectangulorum habetur ex Euclide in puncto L, quod Radium OA bifariam secet. Igitur erecta normali LV, et ab huius Ordinatae Circuli extremo ducta tangente VK, haec determinabit in Curvae *datae* perimetro punctum K, ad quod *maxima* Ordinatarum pertineat KZ. Hoc ipsum consequimur si a *foco* D emittatur DK, quae cum Axe DA angulum efficiat $ADK = 60°$: nam ex Lineae genesi (§§. 56. 57.) DK parallela est ad OV, angulusque $VOA = 60°$ per Elementa. Valores etiam Rectarum DK, DZ, ZK in puncto *maximi* perquam facillime dignosci possunt, propterea quod inter praecipuas *primariae* huius Curvae humanum cor imitantis adfectiones (473) ea sit perpetuae aequalitatis Radii cuiuslibet a *foco* emissi, veluti DB, DC etc., et Abscissae sibi respondentis DH, DH' etc. in Axe DA ab eodem *foco* D computatae, quia ex Elementis angulus HIB bifariam secatur ab ID, angulus $H'I'C$ ab $I'D$ etc., ideoque Triangula orthogonia DHI, DBI, necnon $DH'I'$, DCI' etc. *similia* inter se sunt, et aequalia. Quibus omnibus collectis erit in puncto *maximi* K, $DK = DL = \frac{3}{4} DA$ axis Curvae seu diametri Circuli genitoris, Abscissa $DZ = \frac{DK}{2} = \frac{3}{8} DA$, et Ordinatarum *maxima* $KZ = \frac{3\sqrt{3}}{8} DA$, quemadmodum inveniendum susceperam. Paullo aliter procedit res in Lineis huiusce nominis *secundariis*. Nam supposita ratione *determinante* $HI : IB' = a : b$ in *protractis*, aut $HI : IB'' = a : b$ in *contractis*, inventio anguli

li φ, quem Radius ex *Polo* (cuius citissime sermo erit in §°. seq.) emittendus efficere debeat cum Axe DA ad hoc, ut occurrat Curvae puncto, cui Ordinatarum *maxima* respondeat, dependet ab Aequatione $a\,Cos.\,\varphi + b\,Cos.\,2\varphi = o$; quod est Problema purum Geometriae. Illud, praestantissimum quidem, Syntheseως geometricae nunquam satis laudandae experimentum putem haec omnia cum Hôpitalianis consentire ab intimo erutis Calculi recentioris Infinitesimorum penore, ut l. c. in §°. 62do. clariter demonstrabunt. Sed etiam elegantissimum censeo idgenus *maximum* in *primaria* Ungularum *tangentialium*, vel in Curva Parenti, valde conferre ad illius Lemniscatae illustrationem, cuius mentio facta in §°. 41mo. sub Aequatione $x^4 - a^2x^2 + a^2y^2 = o$. Nam, si in Figa. 60ma. Ordinatae $\Gamma E, \Pi F, \Lambda G$ etc. pares fuerint Normalibus $\Gamma P, \Pi R, AD$ etc., ea oritur Lemniscata $AE\Gamma GOLM$ etc., ita ut $YE = Y\Gamma + \Gamma P$, $SF = S\Pi + \Pi R$, $XG = X\Lambda + \Lambda D$ etc., debeatque variabilis huiusce Rectarum Summae *maximum* esse $IB + BZ$ tum, quum innumeras inter Circuli et Lemniscatae Tangentes $ST, F\Theta$ etc. duo sibi invicem respondentes KIN, HCQ fuerint inter se parallelae; quod Problema, bifariam secto Lemniscatae Semiaxe AO in puncto B, ex iam demonstratis resolvitur. Interea descriptio altera simplicioris illius Lemniscatae omnium facillima liquido constat.

59. Eadem Ungula *tangentialis*, quam hactenus demonstravimus Lineam esse occursuum Tangentium Baseos ac Perpendicularium omnium Cylindri *scaleni*, luculenter ostenditur congruens etiam Lineae occursuum Tangentium Baseos Coni *scaleni* et Perpendicularium super ipsas a vertice eductarum. Ut fidem liberem promissis in §°. 56to., sit nunc $AF''DK$ in eâdem Figa. 56. Circulus Baseos Coni dati, C eius verticis ichnographia vel proiectio orthographica. Docet §us. 55tus. puncta quaesitae Curvae ad Conum pertinentis reperiri dum a puncto C emittantur normales CH, CH' etc. ad tangentes Circuli $FL, F'L'$ etc., quae est ipsamet constructio in praecitato §°. 56to. adhibita pro Cylindro. Igitur semel atque eâdem obliquitate atque ichnographica excentricitate praediti fuerint Cylinder et Conus *obliqui* super eodem Circulo veluti Basi insistentes, eadem ad unguem occursuum Curva prodibit; qua in adfectione emicat nova, nec parum iucunda horumce Corporum analogia. Quum itaque Robervallius iamdudum demonstraverit Curvam illam in Cono *scaleno* esse Circuli Con-

choidem (474), aeque erit Conchois ipsa Circuli in Cylindro *scaleno*. Ego autem isthaec ipsum valde facilius Robervallio hunc in modum ostendo. Super BC veluti diametro describatur Circulus $BNOCR$, ducanturque chordae BN, BO etc. Erit $NH = BF = BA$, $OH' = BF' = BA$, et sic de ceteris in infinitum. Ergo Curva AHH' etc. est ea omnium simplicissima Circuli Conchois, quae *polum* habet in puncto C *dati* Circuli circumferentiae, vel extremo Diametri, intervallum BA Radium Baseos *datae* Coni aut Cylindri, et Circulum genitorem illum, qui diametro gaudeat BC. Omnia igitur *data* sunt tam in Cylindro, quam in Cono ad eam describendam. Hanc Circuli Conchoidem, quam Geometrarum nonnulli iniuria Cissoidem esse adfirmarunt (475), vel Lineam antiquissimam Dioclis hederae folium aemulantem (476), David Rivaltus in *Archimede* suo Parisiis edito vertente anno M.DCXV°., cui titulum fecit ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΑΝΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ, ante omnes protulit (477), nuncupavitque Conchoidem *secundam* (478), ne eum antiquiori Nicomedis (479) praecognita, quam *primam* ideo vocavit, confunderetur. Nihilo tamen minus istam Rivalti et Robervallii Conchoidem, utpote *tangentiali* Ungulae congruentem, *primariam* adpellabo dum $BC = BA$, *protractam* vel oblongatam si $BC < BA$, ac demum si $BC > BA$ *contractam* seu decurtatam. Robervallius, qui fortasse imaginem istius Lineae a Rivalto mutuaverat, solam eius partem depixit $SMAHH'H''$, illam nempe a puncto A distantiae *maximae* a *Polo* C usque ad normalem $H''CS$ a *Polo* ipso digredientem protensam, ratus cum eodem Rivalto Conchoidem Circuli in H'', S obtruncari, eique finem imponi, nec ultra progredi posse (480). Ex adverso Parentus (veluti de medietate dixi in §°. 57mo.) Curvam describens *aequilibrationis*, neque unquam suspicatus fore Circuli Conchoidem, reliquam tantum illius partem delineavit $H''H'''H^{iv}DTS$; adeo ut Conchois integra duabus seiunctis partibus coalescat a Robervallio, et Parento separatim consideratis, ac diversa aetate, diverso itinere, constructione, atque usu in Geometriae et Mechanices commodum recensitis. Quemadmodum enim in Linea Robervalliana quilibet Radius CH etc. a *Polo* C emissus adaequat $BA + CN$ etc., sic in Linea Parenti quivis Radius CH''' etc. $= RH''' - CR = BF''' - CR = BA - CR$ etc., non secus atque in Nicomedis aut Rectae-lineae vulgata Conchoide Summa in Differentiam versa, et vicissim, duas Curvae ipsius partes, sed unam *continuam* Curvam determinat. Ut

autem

autem in vulgata antiquorum Conchoide duo Curvae partes, inferior, scilicet, atque superior Asymptotae, simul iunguntur quà simul Asymptotae eidem ad infinitam a *Polo* distantiam conveniunt, unamque Lineam componunt Algebraicam, ita et partes duo Conchoidis-circuli se invicem nectunt in punctis H'', S, sed finito distantibus intervallo $CH'' = CS = AB$ a *Polo* C, ideoque Lineam undique clausam in spatio finito perficiunt.

60. Aequatio Curvae Robervallii et Parenti, ex superius ostensis ad Cylindrum et Conum simul *scalenum* pertinentis, mira facilitate a mea methodo profluit. Vocatis enim $AB = a$, $BC = b$, Radiis CH, CH' etc. $= z$, Angulisque ACH, ACH' etc. $= \phi$, consequitur statim $z = a + b \,\mathit{Cos.}\, \phi$ uti antea dictum in §°. 52do. Nam CN, CO etc. Cosinus sunt Angulorum BCN, BCO etc. ad CB veluti Radium relati, ex Circuli natura, et hi $\mathit{Cos.}\phi$ ultra CH'' versus D evadant negativi, nimirum $z = a + b \,\mathit{Cos.}\, \varphi$ in $z = a - b \,\mathit{Cos.}\, \varphi$, *salva* semper eàdem universali Aequatione, convertitur. Sin vero Angulos φ numerare potius libeat ab Ordinata $H''CS$, Aequatio Curvae formam acquiret $z = a + b \,\mathit{Sin.}\, \varphi$, quum CN, CO etc. Sinus sint Angulorum $CBN = H''CH$, $CBO = H''CH'$ etc. posito BC Radio, uti supra. Interea monendum est Formulam Aequationis huiusce Trigonometricam parum differre ab ea Conchoidis Nicomedeae, seu a Recta genitae XBZ, quae Curva iisdem positis, quemadmodum in Conchoide-circuli, sic exprimitur $z = a + \frac{b}{\mathit{Cos.}\, \varphi}$, vel potius, si placeat complementa Angulorum revocare, $z = a + \frac{b}{\mathit{Sin.}\, \varphi}$, Functione unica Circuli a numeratore in denominatorem translata, et vicissim. Istarum Conchoidum, uti et priorum, *primariae* a ceteris distinguuntur ope $b = a$, unde earum sint Aequationes $z = a + a \,\mathit{Cos.}\, \phi$, $z = a + \frac{a}{\mathit{Cos.}\, \varphi}$, *contractis* evadentibus dum $b > a$, et *protractis* dum $b < a$, aut vicissim. Nec minori facilitate dimanat Aequatio Conchoidis - Circuli, omnium equidem simplicissima, Coordinatis orthogonalibus CV, CV' etc. $= x$, VH, $V'H'$ etc. $= y$ in computationem inductis more solito Analystarum. Superior enim Aequatio $z = a + b \,\mathit{Cos.}\, \varphi$ eodem redit atque $\sqrt{x^2 + y^2} = a + \frac{bx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

unde

unde fit $(x^2+y^2)^2-(2bx+a^2)(x^2+y^2)+b^2x^2=0$, quae Lineam nostram illis ordinis 4^{ti}., aut Curvis 3^{ii}. generis evidenter adscribit. Initio Abscissarum collocato in puncto D, et non aliter in *polo* C (si de *contractis*, *protractisve* Curvis agatur, quum in *primaria* C et D in unum coeant), Aequatio ipsius Curvae implicatior evadit, sed aeque faciliter derivatur. Facto namque $z=x+(a-b)$ vel $x=z-(a-b)$ $=z-c$, neminem latet Aequatio subsequens $a^2\left((z-c)^2+y^2\right)=\left((z-c)^2+y^2)-b(z-c)\right)^2$, sive post Calculi superatam molestiam $(z^2+y^2)^2-(a^2+4az-2bz)(z^2+y^2)+(6a^2-6ab+b^2)z^2+(2a^2-2ab)y^2-(2a^3-4a^2b+2ab^2)z=0$. Ista Aequatio decernit punctum D esse *quadruplum*, duosque invisibiles *contrarios-flexus* coniungere eo casu, quo *Polus* C bifariam secet Radium BD, aut sit $b=\frac{a}{2}$: nam, quum in D Ordinatae y valor pendeat ab Aequatione $y^4+a^2y^2-2aby^2=0$, hypothesis facta istam reddit $y^4=0$. Patet etiam praeter duas Ordinatas puncti D qualibet in Conchoide aequales o, alias inesse duas *reales*, scilicet, $\pm\sqrt{a}\,.\sqrt{2b-a}$ donec $b>\frac{a}{2}$, quo *limite* traiecto evadunt *imaginariae*. Leonardus Eulerus totam omnimodarum Conchoidum generationem complexus in Capite XVII°. Voluminis II'. *Introductionis in Analysin Infinitorum* (481), ac praesertim Conchoidis-circuli (482), Aequationes ipsas supra traditas Radiis, Abscissisve a *Polo* numeratis invênit. Illa etenim, quam suppeditat, ita expressa $a^2(x^2+y^2)=4(x^2+y^2-bx)^2$, si fiat, quemadmodum ait, $a=2c$, formam induit $(x^2+y^2)^2-(2bx+c^2)(x^2+y^2)+b^2x^2=0$ superiori a me traditae congruentem (483).

61. Quaenam oriatur Aequatio istius Curvae dum Abscissarum initium locetur in Centro B Circuli genitoris ad mentem Parenti, haud abs re fore iudico investigandum. Itaque suppositis BV, BV' etc. $=x$, VH, $V'H'$ etc. $=y$, nascitur Aequatio $(x^2+y^2)^2-(-2bx+a^2)(x^2+y^2)+b^2x^2-2a^2bx-a^2b^2=0$. Aequatio ista tantam habet adfinitatem cum universalissima *Spiricarum* Linearum Aequatione, ut hasce cum Conchoidibus Circuli pene dixeris confundendas. Adfinitatis huiusce caussa et origo patebit legentibus *Analecta* mea *ex pura et mixta Mathesi* (484), brevi (ut dictum alibi) proditura. In amplissima vero

Spiricarum

Spiricarum familia prae ceteris omnibus longe emicat simplicior illa, quae gaudeat Aequatione $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2+y^2) + b^2x^2 = 0$, aut potius trigonometrica $z = \pm\sqrt{a^2 - b^2(Cos.\,\varphi)^2}$ (vide *Notam* 191^{am}.), vel $z = \pm\sqrt{c^2 + b^2(Sin.\,\varphi)^2}$, et meo saltem iudicio, propter mirabiles eius proprietates, quas I°. c°. detexi, est Linea illa ab antiquissimo Geometra Menelao *paradoxae* nomine distincta iuxta Proclum Diadochum in *Commentariis* suis ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ ΤΩΝ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ (485). Haec *mirabilis Spirica* Aequatione sua parum differt a Lemniscata Bernoulliorum fusius animadversa in §°. 41mo., cuius Aequatio more Algebraico scripta $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2+y^2) + 2a^2x^2 = 0$ (486), sive Trigonometrico $z = \pm\sqrt{a^2 - 2a^2(Cos.\,\varphi)^2} = \pm a\sqrt{-Cos.\,2\varphi}$. Nam hae duo Curvae una eademque forent si *coëfficiens* postremi termini $b^2 = 2a^2$ aut $b = a\sqrt{2}$, ceteris omnibus congruentibus. At quum in illa Persei Linea sit semper $b < a$, ea vere congruet Curvis *analogis* Lemniscatae Bernoullianae ab Ellipsibus conicis ortum ducentibus, et in c°. §°. contemplatis sub Aequatione $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2+y^2) + na^2x^2 = 0$ ubi $n < 1$, quomodo innueram. Quae Curvae omnes quum facillime praesidio Circuli describantur (vide §^{um}. 41um.), mirum non erit si in meo *de Lineis Persei Specimine* varii, nec minus elegantes occurrant modi has quoque Secantibus Circuli in auxilium vocatis et ad morem Epicyclorum graphice construendi. Interea, ut cognationes et adfinitates praedictae clarius universaliusque elucescant, eas nunc in compendium actas et ictu oculi facile comparandas subiicio.

Prospectus

Prospectus Curvarum *identicarum* adfiniumque inter Lineas quasdam ordinis quarti (487).		
Rivalti, Robervallii, Parenti, Hopitalii } Conchois 2ª., aut Circuli Conchois omnium simplicissima, et Linea Aequilibrationis (*primaria* vel *secundaria*)	una eademque Curva sunt Algebraica.	Iª. IIª. IIIª. IVª.
Io. Bernoulli Epicyclois a Circulo super aequalem sibi rotante genita	eadem est cum Conchoide Circuli.	Vª.
Linea transiens per concursuum puncta Tangentium Baseos et Perpendicularium a Vertice cuiusvis Coni circularis super ipsas ductarum, sive Linea Robervalliana (IIª.), et Linea transiens per concursuum puncta Tangentium Baseos et Perpendicularium a supremae Baseos Peripheria super ipsas ductarum in quolibet circulari Cylindro	sunt eadem Circuli Conchois.	VIª.
Curva illa cordi similis, quam Britannica Encyclopedia *Cardioidem* vocat, teste Gregorio Fontana in Parte Iª. Voluminis IIⁱ. *Actorum Societatis Italicae* (consulatur *Disquisitio etc.* a pagª. 123ᵗᵃ. ad 142ᵈᵃᵐ.) (488),	eodem redit cum Circuli Conchoide *primaria*, cuius simplicior Aequatio est $(x^2+y^2)^2-2ax(x^2+y^2)-a^2y^2=0$. (vide Nᵘᵐ. Xᵘᵐ.).	VIIª.

Spirica universalis, cuius Aequatio ex alibi demonstratis est $(x^2 + y^2)^2 - (A + Bx)(x^2 + y^2) + Cx^2 + Dx + E = 0$ (signorum consideratione neglecta)	adfinis est Conchoidi-Circuli ad punctum Axis medium relatae, cuius Aequatio $(x^2 + y^2)^2 - (a^2 - 2bx)(x^2 + y^2) + b^2x^2 - 2a^2bx - a^2b^2 = 0$ nec forma, nec terminorum numero, et qualitate ab opposita differt.	VIII[a].
Spirica *mirabilis* Aequatione distincta $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 + y^2) + b^2x^2 = 0$	adfinis est Conchoidi-Circuli ad Polum suum ordinatae, quum huius Aequatio $(x^2 + y^2)^2 - (a^2 + 2bx)(x^2 + y^2) + b^2x^2 = 0$ redundet tantummodo in parte unica (nimirum $-2bx$) Coëfficientis secundi termini, ceteris omnibus et numero et forma iisdem manentibus.	IX[a].
Circulus binatus, in quem vertitur Spirica *mirabilis* dum $b = a$, sive limes potius Lemniscatae Bernoulliorum Aequatione praeditus $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 + y^2) + a^2x^2 = 0$, vel $(x^2 + y^2 - ay)(x^2 + y^2 + ay) = 0$,	adfinitatem habet Circuli *primariae* Conchoidi, cuius Aequatio $(x^2 + y^2)^2 - (a^2 + 2ax)(x^2 + y^2) + a^2x^2 = 0$, quum prima uno solum ab ista deficit termino $-2ax(x^2 + y^2)$.	X[a].
Lemniscata universalis in §[s]. 41[mo]. occasione Bernoullianae superius animadversa, ad quam Aequationis pertinet forma Num[i]. IX[i]. si ad Centrum suum referatur,	adfinis quoque est eâdem ratione Conchoidi-Circuli.	XI[a].

Lemniscata singularis Bernoulliorum Aequatione gaudens $(x^2+y^2)^2-a^2(x^2+y^2)+2a^2x^2=0$ eam ad centrum suum referendo (489)	adfinitatem servat illi singulari Conchoidi-Circuli inter *contractas*, in qua $b=a\sqrt{2}$. Aequatione, scilicet, insignitae $(x^2+y^2)^2-(a^2+2\sqrt{2}.ax)(x^2+y^2)+2a^2x^2=0$.	XII^a.
Curva Cassiniana percelebris, quam vulgo, sed iniuria, vocant plerique *Cassinoidem* (490), Lemniscatam ac Circulum habens *species* inter suas, Aequationeque exornata, abscissarum initio posito in *focorum* alterutro, $(x^2+y^2)^2-(-a^2+2ax)(x^2+y^2)-a^2b^2=0$, ubi a sit *focorum* distantia, ab Rectangulum constans, (vide §^um. 41um.),	adfinis est Spiricae num^l. VIII^vi., ideoque etiam Circuli Conchoidi ad punctum Axis medium relatae, veluti liquido constat.	XIII^a.

Nec Hôpitalius, neque Bragelongnus, Eulerus, Cramerus, Montucla, Encyclopediae Parisiensis Collectores etc. quibus in locis de hisce separatim egerunt Lineis, earundem *identitatem*, et *adfinitatem* suspicati unquam sunt (491), praeter IV^um. et V^um. *casus* omnibus antiquiores.

62. Ut in huius *Prospectus* veritatem toto iure adserendam nihil desideretur, oportet tantummodo congruentes ostendere, sive, quomodo aiunt Geometrae, *identicas* Lineas illas num^is. IV^a. et V^a. descriptas. Ac primum Aequatio Curvae *aequilibrationis*, ab Hôpitalio explicata usque ab anno M.DC.XCV^to. in *Diario Eruditorum Lipsiensi* (492), est $a\sqrt{xx+yy}=bx+\frac{1}{2}xx+\frac{1}{2}yy\mp ff$, sive de more disposita $(x^2+y^2)^2-4((a^2\pm f^2)-bx)(x^2+y^2)+4b^2x^2\mp 8f^2bx+4f^4=0$, aut ob x iuxta

iuxta Hôpitalii resolutionem ex parte negativorum, nimirum a C vel D versus E in Fig^a. 56. (493), et propter $\mp f^2$ *constantem* peregrinam actu Integrationis adiunctam, quae fit $=0$ in casu Curvae *primariae*, ac utriusque ex *secundariis*, scilicet, *nodatae* et puncto *coniugato* praeditae in *Polo*, vertitur in $(x^2+y^2)^2-4(a^2+bx)(x^2+y^2)+4b^2x^2=0$, veluti in num^o. IX^{no}.; nam factis $a'=2a$, $b'=2b$, formam induit $(x^2+y^2)^2-(a'^2+2b'x)(x^2+y^2)+b'^2x^2=0$. Et re quidem vera, si consulatur Schema ipsum ab Hôpitalio contemplatum, nescio quo fato et Cartesianus ille Geometra, de quo loquitur Hôpitalius, difficultatem tulerit perquam maximam in Aequatione huiusce Curvae determinanda (494), nec quomodo Hôpitalius idem Calculum nascentem advocaverit infinite-parvorum. Nam (Fig. 61.) reperta ab Hôpitalio ex finitorum Analysi et primis Staticae legibus Aequatione $CM=2a-\frac{2bz}{a}$, in qua $a=CQ=CD$ Radio Circuli genitoris, $z=CG$, b Recta *data*, illico profluit, ob $CG=a.Cos.QCD=a\,Cos.\varphi$, Aequatio facillima $CM=2a\mp 2b\,Cos.\varphi$ ad Conchoidem-Circuli, cuius (ex §^{o}. 60mo. et Fig^a. 56.) intervallum constans $AB=2a=RQ$, diameter Circuli, a quo Conchois oritur, $BC=2b$ ut superius dixi, ac *Polus* in extremo situs nuper memoratae diametri. Quod ne difficultatem aliquam pareret, addendum curavi Figurae 61^{ae}. ab Hôpitalio traditae Circulos illos Lineae Conchoidalis generatores, in quibus $CS=ST=RQ=2a$, VS aut $V'S$ aut $V''S$ (tribus diversis hypothesibus animadversis) $=2b$, *Polusque* Curvae in C (punctis V, V'', Circulisque quoad oporteat promotis) conlocatus. Cuncta haec mirabiliter adeo conveniunt cum Hôpitalii eiusdem inventis, ut quae de *maximis* Ordinatarum, et Curvae Areis exposui symptomata in §^{o}. 58vo. Elementis Geometriae in subsidium petitis, ille iamdudum [at minus universaliter (495)] eadem explicaverit ope Calculi Infinite-parvorum. Exemplum praebeat Arearum dimensio. Ait Hôpitalius (496) *Spatium integrae Curvae* (*aequilibrationis*) *inclusum aequatur quatuor suis Circulis generatoribus plus duobus Circulis Radio* b *descriptis*. In Conchoide-Circuli *primaria* demonstravi (Fig^a. 61.) Spatium illud esse $\frac{3}{2}$. Areae Circuli TNV' etc., cuius Radius SC, et idcirco $4.\frac{3}{2}=6$ Areis Circuli Hôpitaliani *generatoris* RDQ etc., nimirum $4.RDQ$ etc. $+2.RDQ$ etc. $=$

$= 6RDQ$ etc. propter $b = a$, ad mentem quoque ipsius Hôpitalii (497). In *secundariis* autem ostendi Aream Conchoidis-Circuli aequalem $\frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2}$ Areae Circuli TNV'' etc. $+$ Areae ipsius Circuli TNV'' etc., sive aequalem $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ Areae Circuli, cuius Radius sit b Recta ab Hôpitalio *data*, utpote semis τῆ b', $+ 4$ Areae Circuli RDQ etc. iuxta Hôpitalium ipsum generatoris. At non modo Arearum dimensio confirmatur, verum etiam ceterae omnes illius Curvae adfectiones facili ductu dimanant ex quo primum Ioannes Bernoullius eodem anno versente M DC.XCV^{to}. (498) Lineam *aequilibrationis* adscripsit Epicycloidum familiae. Miror etiam id non vidisse Hôpitalium eundem ante Bernoullium, quum ille ipsomet anno lucubrationes protulerit suas de omnimodis Epicycloidibus *contractis*, *protractisve* etc., quas primum omnium se adinvenisse professus est (499). Quadraturam universalem Arearum Epicycloidalium Hôpitalius invenerat contentam iis Formula $\left(\frac{2a + 3b}{b} + \frac{(a + b)(c^2 - a^2)}{a^2 b} \right)$ per Aream Circuli super alium immotum rotantis (500). Radius Circuli immobilis est b, mobilis a, et c distantia puncti describentis a centro mobilis Circuli. Quid si Hôpitalio in mentem venisset praesidio huius formulae *singularem casum* contemplari Epicycloidis in se redeuntis ob aequales duos Circulos, nimirum $a = b$? Nonne Aream totam inter Epicycloidem in se redeuntem et Peripheriam Circuli immobilis cognovisset esse $\left(3 + \frac{2 \cdot c^2}{a^2} \right)$ per Aream Circuli genitoris? Et addito Circulo genitore, nonne Area omnis ab Epicycloide undique clausa emergebat aequalis 4 Circulis genitoribus $+ 2$ Circulis Radium c habentibus, ut in sua Curva *aequilibrationis* reppererat? Quo cognito, nonne Curvam istam Epicycloidemque, et eiusnam *speciei*, unam eandemque Lineam fore illico persensisset? Sed „ facile est inventis addere „. Ioannes vero Bernoullius ad Lineae *aequilibrationis* Epicycloidisque *identitatem* sistendam, quamvis ingeniose faciliterque hoc effecerit, usus tamen est Aequatione Hôpitalii $CM = 2a - \frac{2bz}{a}$, absqueoquod Conchoidem-Circuli subodoraverit (501). Nec maximus quidem aetatis nostrae Mathematicorum Eulerus Conchoidum-Circuli Epicyclois-

cycloidumque *identitatem*, dum semel atque iterum de hoc egit argumento, unquam est suspicatus. In illo etenim *Introductionis* Capite XVII^{mo}. (vide §^{um}. 60um.) Conchoides-Circuli, et in XXI^{mo}. *De Lineis Transcendentibus* separatim descripsit Epicycloides, nullo cum primis foedere animadverso. Rursus sexennio post, nimirum in *Commentariis* Berolinensis Academiae relatis ad annum M.DCC.LIV^{tum}., quum pag^{a}. 189na. et seqq. Curvam versaverit (2. *Courbe*, Fig^{a}. 3.) Aequatione distinctam $z = a(1 \mp Cos.\varphi)$, sive $(xx + yy)^2 \mp 2ax(xx + yy) = aayy$, Epicycloidem esse admonuit a Circulo genitam super aequalem alterum se revolvente, haudquaquam vero Conchoidem. Eximias profecto singularis huius Epicycloidis adfectiones conlegit, quas inter emicant illa Lineae rectae *constantis* per punctum *regressus* aut *cuspidem* Curvae transeuntis ad geminum usque concursum cum eius perimetro (id ostenditur ictu oculi si Figura inspiciatur 56ta., statimque oritur ab Aequatione $z = a(1 \mp Cos.\varphi)$, nam $180° + \varphi$ Cosinum eundem habet ut φ sed signo opposito gaudentem, ideoque in eâdem Radiorum directione fit $z = a(1 \mp Cos.\varphi)$, $z' = a(1 \pm Cos.\varphi)$, scilicet $z + z' = 2a$), et altera communis Parabolae Apollonianae; quarum postremam summopere amplificavi in peculiari *Disquisitione*, cui titulum feci *De Sectionum Conicarum, quae ad focos referantur, Hyperbolismis*. Congruentiam igitur simplicissimae omnium Conchoidis-Circuli Robervallianae et Epicycloidum Bernoulli quum mihi contigerit oculis subiicere derivatam ex Elementis Geometriae, non ingratum idgenus demonstrationem proferre futurum iri confido in huiusce Theoriae complementum. Iisdem litteris tres Figuras 62. 63. 64. complectar, sed uni solummodo, scilicet, *protractae* (Fig^{a}. 64.) demonstrationem aptabo. Sit *ARC* idem Circulus *AF''D* etc. §^{i}. 56^{ti}., et *FSD*, cuius Centrum *E*, idem ac *BNOC* etc. Bifariam secetur *DC* in puncto *I*, fiatque $FG = DI = AB$; quod idem est ac promovere Circulum *FTC* etc. per intervallum $CI = \frac{CD}{2}$ ita, ut positionem adquirat τῦ *IOG* etc., deindeque τῦ *GNB* sibi aequalis. Hic postremus super primum rotetur, sitque *A* punctum diametri *BG*, quod generet Epicycloidem *ALPQC* etc. In quolibet situ maneat Circulus mobilis, veluti in *HORM*, punctumque descriptionis in *L*, evidens est centra *E*, *K*, punctumque contactus *O* in eâdem recta iacere *EOK*, angulumque $GEO = HKO$, et ideo, quum $ED = KL$, paralle-

 las

las esse rectas EK, DL ex Elementis. Angulus igitur $EDS = ESD = KLS$, nimirum etiam ES parallela KL: quo posito $SL = EK = FC = FA$, ut in §°. 59no., nempe constans. Ergo Epicyclois $ALPQC$ est Conchois-Circuli, *polum* habens in D, Circulum genitorem DSF etc., intervallum constans $EK = 2EO = FA$, quemadmodum I°. c°. expositum fuit. Quod quum paucis, et admiranda facilitate demonstravisse mihi contigerit, non minus mirabile iudico Ungulae erectae Cylindricae perimetrum, Ungulae ipsius in Plano iacentis, et Ungulae etiam per tangentes expansae iuxta §§^{os}. 15um. 16um. 58^{vum}. universaliter consequi ab Ellipseos conicae rectificatione. De primis duobus id plenissime ostendi. Postrema vero, quum Epicyclois sit, Ellipseos ope rectificatur, ac dum *primaria* fuerit (veluti in Fig^{a}. 63.), rectificatur *geometrice* (502), non secus atque *primaria* Cyclois omnimodas inter alias Cycloides.

63. Ioannes Bernoullius optaverat Curvam *aequilibrationis* in re Mechanica utillimam motu continuo describere, non per puncta uti fecerat Hôpitalius (503). Eo desiderio excitatus, ut praxi praesertim id commodi adferret, Epicycloidem esse docuit Lineam ab Hôpitalio repertam, motuque ideo Circuli rotatorio facile depingendam. Quum autem istam Epicycloidem primus invenerim esse Conchoidem-Circuli, maior etiam descriptionis facilitas mihi statim occurrit, magisque idonea Bernoulli voto adimplendo. Non illud ad Conchoidem-Circuli construendam motu continuo Instrumentum proposuerim, quod Rivaltus, aut antiquus potius Archimedis Operum Scholiastes, nullo inventionis pretio accedente, oculis Geometrarum subiecit (504). Nam praeterquamquod nihil aliud sit Instrumentum ipsum, seu, ut Graecis vocare placuit, διαβήτος (505), nisi vetustissimum Nicomedis organum atque notissimum in suam veram Conchoidem depingendam (506), canali recto tantummodo in circularem converso, animadvertebam potissimum idgenus incommodum inesse, geminae scilicet Instrumenti revolutionis per eundem Circulum genitorem ad hoc, ut integra Curva perficeretur, quemadmodum ex Fig^{a}. 65. liquido constat. Organum itaque simplicissimum expertus sum, quod depictum exstat in altera Fig^{a}. 66., cuius praesidio, atque unica veluti communis circini rotatione Lineae omnes describantur, quas a numero I°. usque ad VIII^{vum}. *Prospectus* §^{i}. 61^{mi}. complectitur. Instrumenti forma Parallelogrammum in quatuor angulis instar *Pantographi* versatile ope iuncturarum et axiculorum

rum

ram, Normamque vel potius Normae latus uni lateri adiunctum simul imitatur. Sit igitur construenda *organice* Circuli-Conchois Polo in B, vel B', vel B'' praedita, Circulo genitore AQB, aut ASB', aut ATB'', Intervallo autem $AG = AO$. Casum unicum contemplor Conchoidis *protractae* dum $AB < AG$; nam eodem modo *primaria*, *contractaeve* describerentur. Parallelogrammum $ACDB$ in punctis A, B immotum fixumque maneat; et stilus in E, E', E'', E''', G etc., in intersectione, scilicet, semper situs lateris CV Normae ACV laterisque Parallelogrammi BD, eiusve protractionis, organum luncturis liberum atque solutum revolvendo, Curvam quaesitam in subiacente plano describet. Instrumentum etenim, ubivis in sui revolutione fuerit $ABMNE$, $ABDCE'$, $ABE''K$, $ABILE'''$ etc., puncta E, E', E'', E''' etc. ea in Linea locabit, quae ad unguem conveniat cum illa in Fig^a. 56ta. et §^{o}. 56to. depicta. Dum ergo puncta mobilia C, D Parallelogrammatis describunt Circulorum aequalium excentricorum Peripherias $ONCKLG$, $PMDE''IH$, nimirum Circumferentias eiusdem Circuli per intervallum $OP = AB = GH$ promoti, puncta O, E, E', E'', E''', G sunt in Hemiconchoide-Circuli, et Instrumenti revolutione unica completa omnis reliqua Curva construitur. Organum istud, eodem *Pantographi* artificio imitato, puncta B, D, C super Regulas fluentia, et graduum, canaliculorum, cochlearumque ope adeo disposita praebet, ut non modo diversis inserviat Conchoidibus, quae *Polos* in B', B'' etc. habeant, Circulosque genitores ASB', ATB'' etc., verum etiam intervallum aut maius aut minus constante CA. Haec qui rite intellexerit, non dubito quin et facilitatem et venustatem Circini Conchoidographi secum ipse admiretur, nullisque censeat postponendum Instrumentis, quae Franciscus praesertim Schootenius usque ab anno M.DC.XLVI°. in lucem protulit ad *organice* describendas Sectiones Conicas (506), Newtonusque anno M.DCC IV°. Angulorum mobilium praesidio advocato vulgavit in construendas Sectiones ipsas aliasque superiorum ordinum Lineas (507), ac postmodum addidere Maclaurinus in *Geometria organica sive Descriptione Linearum Curvarum universali* edita vertente anno M.DCC.XX^{mo}. (508), Ioannes Baptista Suardus de algebraicarum et transcendentium simul Curvarum descriptione loquutus anno M.DCC.LII°. (509), ceterique quamplurimi (510), ne de Platone dicam ab incunabulis usque Geometriae linearis inter molimina varia Problematis Deliaci solvendi (511).

64. Tot tantosque fructus a promotis Circulis aliisve Curvis in antecessum collegimus, ut fundamentis Syntheseos geometricae haec promovendarum Figurarum ars adnumeranda iure sit, proximamque teneat sedem principio foecundissimo, quod vocant *superpositionis* Planorum (512), ususque etiam perquam maximi in Solidorum adfectionibus facile detegendi, mutuae eorum *compenetrationis* hypothesi admissa (513). Dum adhuc puer delicias Matheseos aestuante veluti animo prosequebar, Perseumque Geminumque redivivos (514), Euclidis Elementorum *Συνουσιον* (515), Apollonii Loca Conicorum difficillima (516), aliaque sexcenta in lucem aliquando publicam edere posse mente volutabam, multa de argumento illo nobilissimo paraveram fortasse non poenitenda. Promovebam ex. gr. in *Apollonio meo* Hyperbolam conicam (Fig^a. 67.) super alterutra Asymptotarum *AB* per intervallum quodvis *AH*, et illico oriebatur Area infinite-longa *FCDE* finitae magnitudinis, quippe aequalis Areae Parallelogrammaris subiacentis *GAHI*, quod semel atque primum viderunt in Solidis Triumviri illustres Torricellius, Robervallius, et Cavalerius (517) *sublimi* tangere *sydera vertice* censuerunt. In *Euclide meo* promovebam (eodem semper in Plano Recta ac Curva manentibus) Rectam quamlibet sibi semper parallelam *AB* per Curvae cuiusvis perimetrum *CAD* (Fig^a. 68.), et alterum quidem extremum *B* Rectae *datae* repetebat Curvam eandem *EBF*, sed nunquam ad *CAD* parallelam, *parallelismo* Curvarum in ipso Plano iacentium exoriente solummodo ab evolutione unius eiusdemque Lineae, id primum demonstrante Leibnitio (518). Alibi Logarithmicam promovebam (519), *Maximumque* facillime reperi in *Curva Caloris* ab Ioanne Henrico Lamberto, usque ab anno M.DCC.LV°. *Helveticorum Actorum* in Volumine II°. Basileae edito, summa mentis acie ab idiomate Physico in Mathematicum versa (520). Calculi Differentialis ope isthuc ipsum, quod ego Mathesin vix in limine salutatus obtinueram, consequutus iam erat Auctor egregius, et inventionum ubertate atque elegantia nulli comparandus Geometrarum. Curva Lamberti *ABCD* (Fig^a. 69.) ea est, quae abscissas communes AF, AF' etc. habeat duabus Logarithmicis PGM, PEL diversa Subtangente praeditis, Ordinatas vero $FB, F'B'$ etc. aequales differentiis Ordinatarum in Logarithmicis, nimirum $FB = EG$, $F'B' = E'G'$ etc. Ordinatarum ergo *maxima* $IO = TS$ respondet Abscissae huiuscemodi AO, ut a punctis S, T Logarithmicarum Tangentes ductae SR, TV sint inter se parallelae,

lelae, quomodo in §§[i]. 16°. ac 58[vo]. dudum ostendi. Exinde fluit Ordinatas *OS*, *OT* esse in *data* Subtangentium ratione, numeros, scilicet, esse communi Logarithmo gaudentes. Ad hoc itaque, ut punctum *S* inveniatur, a quo cuncta pendent, secetur *PA* in *Q* ita, ut $PA:AQ::OV:OR$, nimirum, in *data* Subtangentium proportione, tantoque retrocedat intervallo super *AH* Logarithmica exterior *PTL*, quanti opus est, ut transeat per *Q*; punctumque *S* intersectionis eius, et interioris Logisticae *PIM* erit quaesitum. Nam ex Elementis Logometriae in eâdem Logistica $PA:TO::QA:SO$. Quinimo et Spatium infinite-longum *AICDNOA* a Lamberti Linea, post *flexum contrarium* in *C* evidenter asymptotica, comprehensum mensurae finitae ac determinatae capax esse simul detexi, proptereaquod sit aequale Spatio aut Bilineo infinite-longo *PTLMSP* ex Lineae genesi, nempe $PTLNAP - PSMNAP$ aut $PA.OV - PA.OR = PA.RV$; et sic *mutatis mutandis* de partibus disserendum (521).

65 *Meus* ille pueriliter eo temporis excultus *Euclides* universa quoque continebat a Circulo, et Cono-recto deducta Theoremata, quae longa inscriptione et circumscriptione Figurarum rectilinearum, aut Triangulo *differentiali* Robervallius, Tacquetus, Pascalius, Fermatius, Barrowius, Maclaurinus, prae ceteris, adstruere conati fuerunt (522). Propositio Euclidea (ex.gr.) XXXV[a]. Libri III[ii]. Elementorum caput pene est, summusque cardo totius Geometriae recentiorum. Revera in Fig[a]. 70. duae Circuli cuiuslibet Chordae *DIB*, *FIA*, quoquomodo, ideoque et perpendiculariter occurrentes in *I*, ita secantur, ut $IB:IA::IF:ID$, quum sit $IB:ID = IA:IF$. Igitur *ultima* ratio $IB:IA = 2IE:2CB = CO:CB$. Praeterea ducta Chorda *AB*. aliâque *DF*, et Diametro *DOH*, ob Triangula *similia* ex eâdem Propositione enascentia, est $AB:AI::DF:DI$, $AB:BI::DF:FI$, quarum idcirco rationum *limites* erunt. $AB:AI::DOH:DB = OB:BC$, et $AB:BI::DOH:BH = OB:BG$. Hisce tantummodo fundamentis innititur non modo doctrina Pascalii, verum etiam ista omnis *Mathematica Exercitatio*, qua doctrinam illam, quoad vires meae non defecissent, recensendam, amplificandam, exornandamque multis abhinc annis susceperam. Nam, praeter Circulum, aeque iidem *limites* proportionum universis Lineis Curvis *M'MAN* ad Axes *M'L'*, *ML* etc. relatis clariter adplicantur. Circulis enim contemplatis *osculatoribus* derivatio patet facillima tam $AI:IB = CB:CO = PB:PK$ aut $P'B:P'K'$, quam $AB:AI =$

OB:

$OB:BC = BK:BP$ aut $BK':BP'$, necnon $AB:BI = OB:BG = BK:KP$ aut $BK':K'P'$, sublata tandem consideratione Circuli eiusdem *osculatoris* (523). Circulus ipse *osculator* ex iisdem elementaribus profluit principiis. Nam Circuli Aequatio eandem cum Arcu AB Lineae *datae* curvaturam habentis est necessario per Euclidem $AO.AI = AT.AB$, sive $Rdx = zds$, aut $R = \frac{zds}{dx}$: at R variato z constans manet ex natura Circuli *quaesiti*: erit igitur $d\left(\frac{zds}{dx}\right) = 0$ (524), qua in expressione pro $dz = dAT$ substitui debet aequalis $dy = dAS$, seu dAS', ut dz ab Aequatione *differentiali* 2^{di}. ordinis eliminetur (525), et z a Lineae *datae* eiusve Aequationis quantitatibus tantummodo pendeat, atque dimanet. Hac ars tota Barrowii, Carraei (526), aliorumque redit de dimensione Arearum et rectificatione Curvarum in eodem Plano iacentium, Ungularum, omniumque complanatione Superficierum Corporum rotundorum, ceteris a Theoremate Pythagorico, a XLVII^a., scilicet, Libri I^i. Euclidis dependentibus (527). Torricellio quippe duce in MS. praecitato Volumine (528) Armillae Conicae a recta AB rotatione genitae sunt ad Armillas circulares a BI generatas circum ML aut ML', sive priorum ichnographias ut $AB:BI$, nimirum in *limite* ut $BK:KP$ aut $BK':K'P'$. Superficies ergo rotundi Solidi est ad Circulum Baseos ut *Summa* normalium Curvae ad eam Subnormalium. Archimedeam potius, quam Torricellianam dixerim idgenus argumentationem, quum a Propositione XV^a. Lib. I^i. *De Sphaera et Cylindro* dimanet.

66. Euclidem unicum sequutus uberrimam insuper Curvarum geometrice quadrabilium segetem conlegi, quacum frequentissime conversabar. Principium erat in Circulo simplicissimum atque *elementare* Subnormales eius RO, CO etc. Axi RO normaliter ordinatas Aream efficere aequalem Triangulo ORQ vel OCD, nempe semper aequalem $\frac{OR^2}{2}$ aut $\frac{OC^2}{2}$, scilicet semissi Quadrati ipsius Subnormalium primae, vel generaliter $\frac{OR^2 - CB^2}{2}$; ex quo fit elementum *Summae* Subnormalium semissem peraequare Quadrati elementi respondentis Ordinatae. Singularis casus iste ceteris cuiuscunque ordinis Lineis, tam algebraicis, quam transcendentibus, extenditur universaliter, adeo ut uno ferme temporis puncto *quadrabiles* Curvae

Curvae innumerae depromi possint. Inducta enim *osculatoris* Circuli consideratione evidens est Subnormales Curvae *datae* PK aut $P'K'$ ad eas Circuli CO proportionem servare BP vel BP' ad BC. Erit igitur $PK.AI$ aut $P'K'.AI$ ad $CO.AI$ veluti $BP.BI$ aut $BP'.BI$ ad $BC.BI$. At ex praemissis $CO.AI = BC.BI$. Ergo etiam $\int PK.AI$ sive $\int P'K'.AI$ adaequat $\int BP.BI$ aut $\int BP'.BI$, scilicet, semissem Quadrati BP^2 aut BP'^2 (*Constante* addita aut dempta). Nam ut $CB.IB$ est medietas elementi Quadrati τȣ AT, ita, propter constantem TS, CP etc. vel TS', CP' etc., τὸ $PB.BI$ aut $P'B.BI$ elementum sistit semissis Quadrati τȣ AS vel AS'. Exempla passim, copioseque occurrunt Geometris. Sic in Logarithmica quae oritur Linea Subnormalium hac gaudet Aequatione $y = e^{2x}$, Subtangente posita $= 1$. Est itaque $\int e^{2x}dx = \frac{(e^x)^2}{2} = \frac{e^{2x}}{2}$, unde cognoscitur $d(e^{2x}) = e^{2x}.2dx$, sive $d(e^x) = e^x dx$, quod Theorema alii repetunt ex Calculorum profunditate. Conicarum Subnormales nihil novi elargiuntur, proptereaquod generent Lineas rectas. Non item si Hyperbola Apolloniana ad Asymptotas referatur, quo in *casu* Subnormalium Linea est illa Aequatione praedita $\frac{a^4}{x^3} = y$, nimirum Hyperbola altioris ordinis, cuius Aream infinite-longam perfecte *quadrabilem* esse hac theoria duce detegitur, quum oriatur $\int a^4 . x^{-3}dx = -\frac{\left(\frac{a^2}{x}\right)^2}{2} + C$. Subnormales in Cycloide *primaria* ad Axem dispositae Curvam huiusmodi efficiunt, cuius Area sit ad inscriptum Semicirculum *genitorem* Cycloidis, et sumptis duplis Area tota ad inscriptum Circulum, veluti Circularis Circumferentia ad suam Diametrum. Aequatio autem Lineae illius transcendentis est $\frac{(1 + Cos.x)(x + Sin\,x)}{Sin.\,x} = y$, vocato x Arcu Circuli *genitoris* quemadmodum in Cycloide (529). Haec dicta sint ut satis superque constet de Syntheseως geometricae dignitate ac thesauris, neque idcirco mirentur amplius Matheseως cultores ab uno Pascalii Theoremate me perexi-

 miam

miam Integralis Calculi partem hac in *Exercitatione* promovisse, non secus atque alteram in Calculi eiusdem *Tractatum* Ioannis-Antonii-Nicolai Condorceti nuper mihi contigerit amicis plaudentibus ab uno Leibnitii invento facillime derivatam exponere (530).

IN

IN OPERIS CONTEXTVM

ADNOTATIONES.

(1) DE Alexi Fontainio narrat Condorcetus imperitum fuisse prae omnibus Geometriae (vid^{ur}. *Historia Academiae Regiae Scientiarum Parisiensis* anni M.DCC.LXXII^{i}. in Elogio Fontainii). Hoc si laudabile iudicent alii. Geometricae Synthesis vel potius Dialecticae universalis ignari elegantiae ferias dicant, et in maximos errores labantur necesse est. Nec recentissima desunt exempla. Albertus Girardus Sancti Michaëlis in Opere singulari, cui titulus est *Invention nouvelle en Algèbre*, edito sub anni lapsum M.DC.XXIX^{i}., ae paullo post Bonaventura Cavalerius Iesuata simplicissima usus finitorum Geometria in *Directorio universali Uranometrico*, Bononiae edito vertente anno M.DC.XXXII°., areas Triangulorum, quorum latera sint arcus Circuli maximi, metitus est (vid. Axioma 5um. Capitis VIII^{i}. Partis III^{ae}.). Istud tamen Theorema Leibnitio cognitum, uti constat ex *Diario Lipsiensi* anni M.DC.XCII^{i}. pag^{a}. 275^{a}., ignotumque auctori F. K. Schediasmatis in Sectione II^{a}. Voluminis IX. *Supplementorum* ipsius *Diarii* p^{a}. 45., ac de quo altum silentium et penes Thomam Lagnyum in eius Exercitatione geometrica inter *Memorabilia Academiae Parisiensis* Anni M.DCC.XIV^{i}. et in *Historia* Montuclae (pag^{a}. 26. Voluminis II^{i}.), diu torsit Geometrarum posteriorum ingenia, hodieque torquet adiumento etiam infinite - parvorum (*Acta Eruditorum Lipsiae* anni M.DC.XCI^{i}. pag^{is}. 287. 88., Elementa Fluxionum Thomae Simpsonii edita Londini anno M.DCC.L^{mo}. sub titulo *The Doctrine and Application of Fluxions*, *Commentarii Berolinenses* pro anno M.DCC.LIII^{io}. in Problemate III^{io}. ac praesertim Corollario 2do. (pag^{s}. 233. 34. 35.), et rursum (pag^{a}. 256.) in Problemate IX^{no}., *Acta Senensis Academiae* Tom. V. anni M.DCC.LXXIV^{i}. pag^{a}. 82. et seqq., Volumen II^{um}, *Cursus Mathematici* a Bezouto compositi pag^{a}. 239. editionis 3^{iae}. Parisinae PROOEMIVM

 anni

anni M.DCC.LXXXI., *Memorabilia* Academiae Scientiarum Parisinae pro anno M. DCC.LXXXIII^{io}. publici iuris facta anno M.DCC LXXXVI^{to}. pag^{a}. 344. et seqq. recensente Abbate Ioanne Paulo De Gua in Diatriba *Diverses Mesures etc.*). Ludovicus Wentzius in Volumine I°. *Actorum Helveticorum*, quod Basileae anno M. DCC. LI^{mo}. publici iuris factum est, de Problemate Deliaco disserens (pag^{a}. 83. etc.) per obliquas admodum ambages excurrit ut Lemma demonstret „ differentiolas sive incrementa rectarum (Fig^{a}. 71ma.) HI, HI', HI'', etc angulis ad H aequaliter crescentibus eo magis augeri, quo remotior sit recta HI, HI', HI'' etc. a perpendiculari HE „. Hoc autem facillime ostenditur animadversis similibus triangulis *characteristicis* orthogoniis IOI', $I'O'I''$ etc., ac in mentem revocato Theoremate Euclideo, nimirum $I''I':I'I$ (ideoque ob trigonorum similitudinem $I''O':I'O$) :: $I''H:IH$. Crimen alterum laesae Matheseos perlegi nuperrime in Opella anonyma Liburni edita anno M.DCC.LXXXVI°. (*Appendice Idrometrica al Discorso del M. R. P. Francesco Maria Gaudio ec.*), ubi pag^{a}. 69na. nihilum, negativo additum, imaginario maius adseritur. Nullus dubito quin iocetur Anonymus. At iocus iste sale attico caret, caretque Mathesi. Absurda est enim comparatio quaelibet *negativi* et *imaginarii*.

(2) Lib. III. Cap. XVIII. Probl. II. *Geometriae practicae* in Volumine I°. *Opera Mathematica R. P. Andreae Tacquet Antuerpiensis* = Antuerpiae apud Iacobum Meursium M.DC.LXIX. =. „ Nondum inventa est ratio metiendi superficiem Cylindri *scaleni*, multominus *elliptici*, et aliorum „. Infra occurrit εὐθεῖαι iuxta antiquissimos Codices, ex auctoritate Henrici Stephani, haudquaquam εὐθεῖαι ut aliquando scripsit Wallisius. (*Nota* 5.).

(3) Opus postumum sub titulo *Traité des Indivisibles* editum inter alia, curante Galoisio, Lutetiae Parisiorum in *Recueil de divers Ouvrages de Mathematique & de Physique par Messieurs de l'Academie Royale des Sciences* anno M.DC.XCIII^{io}. a pag^{a}. 190ma. usque ad 246^{tam}., rursusque Parisiis, et Hagae Comitum in Collectionis veterum Actorum celeberrimae eiusdem Academiae Volumine VI°.

(4) Titulus integer huic Operi adpositus *Veterum Geometria promota in septem de Cycloide Libri* „ Tolosae M.DC.LX. „.

(5) Stilo eruditissimi Ioannis Wallisii nuncuparetur πλατυσμὸς . „ *Tractatus duo &c.*, Oxonii editi an. M. DC. LIX^{no}. typis academicis, quorum Pars II^{da}. Christiano Hugenio Constantini F. dicata.

(6) Schediasma istud, tametsi in *Commentariis* insertum relatis ad annos M. DCC. XLIV^{um}. XLVI^{tum}., typis vulgatum fuit an. M. DCC. LI^{mo}.

(7) Latina versio primaque editio Librorum *de Cylindri et Coni sectionibus* ea est, quam Bononiae protulit anno M. D. LXVI°. Fridericus Commandinus ex typographeo

pheo Alexandri Benatii sub titulo *Apollonii Pergaei Conicorum Libri quatuor una cum Pappi Alexandrini Lemmatibus et Commentariis Eutocii Ascalonitae, Sereni Antissensis Philosophi Libri duo etc.* Serenus ipse Lesbius emendatior et auctior rursus adparuit in Editione Oxoniensi Graeco-latina *Apollonii* an. M.DCC.X^{mi}., doctissimo Edmundo Halleyo recensente ac curante. Platonem id primum invenisse Laërtius testatur. Ceterum Ellipsium nomine etiam Circulum vel Ellipsin intelligo *aequilateram*, ut in subcontraria sectione etc. Sereni vero theoria eodem redit tam in rectis, quam in obliquis Cylindris.

(8) Ait etenim l°. c°. „ Quod mirum est cur non deprehenderint acuti geometrae superioris aetatis; cum ex Sereni Antissensis meditatione iam cognitum diu sit sectionem obliquam Cylindri circularis recti efficere ellipsin. „

(9) Exstat in Volumine. V°. *Oeuvres de Blaise Pascal = a la Haye chez Detune* M. DCC. LXX. pag^{a}. 402. Locus et epocha huic Epistolae desunt. Quum autem in ipsa laudentur Hugenii inventa de Horologio oscillatorio, et de mensura superficierum Conoidum a Curvis conicis genitorum, dubio caret Pascalium scripsisse eandem epistolam aut labente aut elapso anno M.DC.LVII°. Immo etiam serius, ut infra patebit.

(10) In Breviario Historiae Cycloidis, quod anno M.DCC.XLV°. edidit Romae Rogerus Boscovichius Iesuita, perexímii huiusce reperti ne verbum quidem occurrit. Nec miror: quum penes Loiolitas omnes, eorumque pedissequos male audiat Pascalius ob suas „ Epistolas Provinciales „ in re polemica elegantissimas.

(11) Non apte quidem Scriptor Elogii Evangelistae Torricellii (Tom. IV. editionis Lucensis „ *Elogj degli Uomini Illustri Toscani* „) loquitur de Cycloide in Adnotatione 1^{a}. pag^{a}. 432. hisce fidelibus verbis. „ *E quanto alla misura di essa* (Cicloide) *e delle sue parti l' attribuiscono* (gli Enciclopedisti) *a M. Wren ec.* „. De quanam mensura hic sermo sit hariolari quidem, sed nunquam scire liceret. Areae ne? Perimetri ne? etc. etc. Auctores Dictionarii Encyclopaedici in Voce *Cycloide* scripserunt clarissime *Le premier qui en a mesuré la ligne courbe et ses parties, et qui en a donné la comparaison avec la ligne droite, a été M. Wren*. Vetustissimum et succi plenum effatum illud „ tractent fabrilia fabri „.

(12) Octobris mense labente anni M.DC.LVIII^{vi}. Wrennus Pascalio rectificationem a se repertam Trochoidis illius, quam Vincentius Vivianus tota Gallia et Anglia obsistentibus *Galilaicam* dicebat, communicavit. Quum igitur Epistola *Dimension des Lignes Courbes de toutes les Roulettes* rectificatam memoret Cycloidem primariam, et in altera Pascalii Lucubratione *Traité generale de la Roulette* Auctor ipse fateatur inventum Wrenni a Robervallio postmodum, Fermatio, Auzouto, necnon a se demonstratum (*Oeuvres* etc. Tom. V.), in aperto est Epistolam illam sub finem anni M.DC.LVIII^{vi}., vel anno M.DC.LIX^{no}. etc. ad Hugenium missam fuisse, quemadmodum in Adnotatione 9^{a}. nunciaveram.

(13) Nu-

(13) Nuperrime in Sanctae Crucis Templo Florentia, sero memor, ære collecto Cenotaphium exstruxit Nicolao Machiavello epigraphe insculpta *Tanto nomini nullum par elogium*. Laudarunt aliqui, alii irriserunt epigraphen absurdamque iactarunt, perinde ac si eloquentiae genus exornativum tantummodo litteratis viris vulgatibus, ne dicam homunculis, laudandis devoveretur. Verum quaenam in lapide digna laus Machiavello post CCL. annorum a die obitus intervallum? Quodnam in marmore panegyricon Operibus Machiavelli historico-politicis unquam par esset? In Abbatia West-Monasterii Epitaphium exstat ad statuam Nevvtoni tam dignitatis inops, quam verborum abundans. Ingeniosus quidam, laudis aspernatus intempestivam prolixitatem, admoto stilo subscripsit *Virum si nescis, abito*. (Legantur Tom. I. Collectionis *Opusculorum Neutoni* editorum Lausannae et Genevae an. M.DCC.XLIV[to]. in eius *Vita* ad p[am]. XXX. et Vol. 1[um]. Operis notissimi, cui titulus *Londres*, 2[ae]. editionis Neoeomensis anni M.DCC.LXX. pag. 475.). Angelus Politianus, sui temporis eruditissimus, in Epigrammate celeberrimo ad monumentum Iotti, quod Metropolitanam Ecclesiam Florentiae exornat, hisce memorandis versibus laudem perficit „ *Denique sum Iottus: quid opus fuit illa referre? Hoc nomen longi carminis instar erit* „. Rhetorice quidem, sed vere, quum anno M.CCC.XXXVI°. fato cesserit Iottus, et Monumentum erectum a concivibus suis anno M.CCCC.LXXXX[mo].

(14) Consulatur Volumen II[um]. *Histoire des Mathematiques* edit. M.DCC.LVII. pag[is]. 58. 59.

(15) L. c. Lib. I. §§. VII. VIII. IX.

(16) *Coni scaleni superficiem veteres, quod constet, non attigere. Aegidius Robervallius, me iuvene, aiebat, eius explanationem sibi esse notam, sed qualem habuerit non dixit, nihilque ea de re inter eius schedas repertum accepi.* (Volumen III[ium]. seu Continuatio II[a]. *Miscellaneorum Berolinensium* edit. M.DCC.XXVII., ubi exstat *Additio* G. G. L. pag[a]. 285.).

(17) Pascalius ipse hoc adfirmat in Epistola toties citata, additque ad Robervallium et Slusium Litteras misisse ineunte Septembri.

(18) Elaboratas ac primitivas in Lemniscatam meditationes Comitis Fagnani de Senogallia complectuntur Volumina Diarii Italici (*Giornale de' Letterati d' Italia*) XXIX[um]. XXX[um]. et XXXIV[um]. pro annis M.DCC.XVII°., M.DCC.XVIII°., M.DCC.XXI[m°]., et XXII[do]. Venetae editionis M.DCC.XVIII. ac M.DCC.XXIII. Caietana Agnesia in *Analyticis Institutionibus* Mediolani editis anno M.DCC.XLVIII[vo]. hanc tum nascentem Integralium partem versare non potuit. De illa loquor clarissima Foemina, quam Scriptores Praefationis (pag. XI.) ad *Institutiones* in Adnotatione 21[ma]. memoratas Marchionatus nescio cuius insignibus nobilitare consuerunt.

(19) Vid,

(19) Vid. Caput III^tium^. Libri II^i^. in II°. Volumine pag^a^. 225. §. 398. et seqq. „*Traité des Fluxions* „ versionis Gallicae Parisiis editae anno M.DCC.XLIX°. Editio autem Anglica ipsius Tractatus, titulo adposito *Treatise of fluxions*, ea est Edinburgi M.DCC.XLII., in *Analystam* Berkleyi, Cluani (*Cloyn en Irlande*) Episcopi, a Maclaurino producta.

(20) *Histoire de l'Académie Royale des Sciences, et Belles-Lettres* „ *a Berlin* „ annorum M.DCC.XLVI^i^. et M.DCC.XLVIII^vi^., quae duo Volumina annis M.DCC.XLVIII°. et L^mo^. adparuere; insuper Volumen alterum pro anno M.DCC.L^mo^., ac Volumen I^um^. *Opusculorum* Alemberti editum Lutetiae Parisiorum anno M.DCC.LXI°., necnon, praeter VII^um^., IV^um^. et V^um^. typis vulgata vertente eodem anno M.DCC.LXVIII^vo^.

(21) Praesertim in Capitibus XII°. ac XIII°. Lib. I^i^. Voluminis II^i^. Cursus Analytici titulo distincti *Institutiones Analyticae a Vincentio Riccato Societatis Iesu et Hieronymo Saladino Monacho Coelestino collectae*, ac Bononiae editi anno M.DCC.LXVII°. ex typographio Sancti Thomae Aquinatis.

(22) In Parte priori Actorum Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae pro anno M.DCC.LXXVIII°. exstat ad pag^im^. 58. Schediasma *de reductione Formularum integralium ad rectificationem Ellipseos et Hyperbolae, auctore A. Lexell*, editum anno M.DCC.LXXX°. Et Pars secunda eorundem *Actorum* edita posteriori anno M.DCC.LXXXI. continet *Additamentum*. Eulerus autem idem argumentum tractaverat in Voluminibus VIII^vo^. ac X^mo^. *Actorum* eorundem pro annis M.DCC.LX., LXI., LXIV., quae Petropoli edita fuerunt sub annorum lapsum M.DCC.LXIII. et LXVI.

(23) Pars II^a^. Actorum Societatis Italicae, quae Veronae est, editionis M.DCC.LXXXIV., habet ad pag^am^. 749^nam^. Diatribam „ *Delle Formole Differenziali, la cui integrazione dipende dalla rettificazione delle Sezioni Coniche = del Sig. Gian-Francesco Malfatti Professore di Matematica nell' Università di Ferrara* =.

(24) Sunt Curvae *Spiricae* (σπειρικαὶ), toto caelo a Spiralibus, de quibus Archimedis Liber περὶ Ἑλικῶν, discrepantes.

(25) Usus autem *infinite parvorum* suis finibus circumscribendus, ne turpiter Euclide reiecto antiquorum exulet Geometria. Risum movet Torricellii *Elogium* legenti, cuius mentio facta in Adnotatione 11ma., eo loci, quo adseritur (pag^a^. 431.) „ *giacchè la Geometria dei suoi tempi altra non era che la Geometria degli Antichi* „ ..... „ *L'aspetto di questa Scienza si mutò tutto in un tratto l'anno* 1684. *all'apparire delle Opere di Leibnitz sul Calcolo Differenziale o sia degli Infinitamente piccoli etc.* „ Heu! decus Etruriae! Torricellius valde iunior Galilaeo, iunior Cavalerio, novae Indivisibilium Geometriae auctoribus celeberrimis. Torricellii Opera, Florentiae edita typis Amatoris Massae et Laurentii de Landis anno M.DC.XLIV°., ferme omnia innituntur Geometriae *indivisibilium*, quam Bonaventura Cavalerius

usque

usque ab anno M.DC.XXXV°. Bononiae publicam fecerat ex typographeo Clementis Ferronii, et Galilaeus praemonstraverat in *Dialogis Scientiae novae etc.*, ac praesertim in prioris Dialogi prima Die (1ª. *Giornata*), editionis Lugduni - Batavorum M.DC.XXXVII. XXXVIII. curante Comite *De Noailles*. Summo itaque iure Θεῖος ille Plato foribus Academiae inscriptam voluit epigraphen „ Οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω „. Sed et in usu Indivisibilium, aut infinite parvorum, atque Infiniti, Mathematicorum, nonnulli nimis abundant. Hôpitalius, aliique, et inter recentiores Gregorius Fontana in Vª. *Disquisitionum mathematicarum*, quas Papiae protulit anno M.DCC.LXXX°., ad pagᵃᵐ. 122., Problema minimi Crepusculi solutum dederunt ope Calculi Differentialis, dum Antonius Parentus Trigonometriam Sphaericam recte adhibens, et animadvertens isochronos semper esse arcus quoscumque diurnos comprehensos a duobus Circulis horariis eorum, quos vocant *Babylonios*, idem facillime adeptus est. (*Essais et Recherches de Mathematique et de Physique* = *a Paris* = M.DCC.XIII., Vol. II. pag. 475.; Prolegomena novae Theoriae *Magnitudinum exponentialium etc.*, quam Florentiae edidi anno M.DCC.LXXXIIᵈᵒ., ad pag. LVII.). Exemplum alterum obviam fit in Problemate astronomico Godini, quo quaeritur punctum Eclipticae, ubi Solis motus in *ascensione recta* eius motum adaequet in *longitudine*. Problema istud ope multiplicis Analogiae Triangulorum differentialium solutum praebent *Memorabilia Scientiarum Academiae Parisiensis* pro anno M.DCC.XXX°. editionis M.DCC.XXXII. ad pag. 26. Parentus autem usque ab anno M.DCC.IV°. in Actis Regiae eiusdem Academiae pag. 34 ita determinaverat punctum quaesitum S (Fig. 72ᵈᵃ.), ut foret $Tang\ SC = Sin.\ PS$; quemadmodum pag. 28. Godinus ipse fatetur. Sed ex vulgato canone Sphaericorum habetur Analogia $R : Cosin\ PSC :: Tang.\ PS : Tang.\ SC$, nimirum $R : Cosin.\ PSC :: \frac{R.\ Sin.\ PS}{Cosin.\ PS} : Sin.\ PS$. Igitur $Cosin.\ PSC = Cosin.\ PS$, ideoque et $Sin.\ PSC = Sin.\ PS$. Quum itaque Trigonometria doceat esse $Sin.\ PSC = \frac{R.\ Sin.\ PC}{Sin.\ PS}$, orietur Aequatio $(Sin.\ PS)^2 = R\ (Sin.\ PC) = R\ (Cosin.\ CQ)$, quae est ipsa Formula a Godino suppeditata. Nihil ergo opus erat tot, tantisque differentialium Analogiis. Ab una etenim Parenti Formula omnia facillime derivantur, uti inter cetera $Cotang.\ ES = Cosin.\ SR = Sin.\ ESR$, necnon $\frac{R.\ Sin.\ SC}{Tang.\ SC} = Sin.\ SPC = Sin.\ RQ$, vel $Cosin.\ SC = Sin.\ RQ$, aut denique $ES + ER = 90°$, $SC + RQ = 90°$. Exinde fluit punctum S adeo situm, ut Quadrans Circuli declinationis PSR *subcontrarie* secet duo Quadrantes ESC, ERQ Eclipticae et Aequatoris, ita nimirum, ut $ES = RQ$, $SC = ER$. Quae proprietas elegantissima non modo fundamentum est Formularum Parenti, et Godini, verum etiam earum exsistentium in *Doctrina Fluxionum* Thomae Simpsonii (Adnotatio 1ª.), atque in Ioannis Mulleri Regiomontani *Almagesti Epitomes*

mes Libro III^{io}. Propos. XXV^{a}., in *Epitomes* Ioannis Kepleri Lib. III^{io} (p^{a}. 258.), et in *Cosmographiae* Simonis Stevini Parte III^{a}. de mot. cael. (p^{a}148.) inter alia Voluminis I. *Hypomnematωn Mathematicorum*, ad idem Problema de *medio* Solis motu solvendum. Miror praeterea acutissimum Ioannem Henricum Lambertum in *Tentamine de vi caloris etc.*, quod *Actorum Helveticorum* II°. Volumine continetur Basileae edito anno M.DCC.LV°., haudquaquam vidisse, nisi post varios longosque Geometriae differentialium conatus (pag. 194. 195.), Logarithmicas Curvas diversa parametro aut *modulo* gaudentes ita esse compositas, ut *abscissae* aequalibus *ordinatis* respondentes sint subtangentibus geometrice proportionales; cuius tamen Theorematis demonstratio vix indiget Geometriae. Quid demum dicam de celeberrima Ioannis Wallisii infinita *factorum* Serie ad Circuli Quadraturam ducente? Eam in *Circulo* Petri Mengoli, Bononiae edito anno M.DC.LXXII°., tam admiranda simplicitate demonstratam inveni, ut nequidem Infiniti nomen necesse sit adhibere. Montucla autem de Mengolo, in Bononiensi Nobilium Collegio Mechanices Professore ac de Infinitis Seriebus optime merito, aeternum silet. Rectius profecto se gessit B^{us}. Taylorus, qui in Volumine XXXI^{mo}. *Transactionum Philosophicarum* pleraque a Torricellio inventa de Proiectorum gravium in vacuo Traiectoria, ac praesertim elegantissimam Propositionem XI^{mam}. ad pag^{am}. 162^{dam}. eâdem fere geometrica Synthesi fuit prosequutus. (Vid. Num^{um}. 367. §. VIII. *Propositiones aliquos de Proiectilium motu Parabolico scriptae anno* 1710. a pag^{a}. 151ma. usque ad 164^{tam}.).

(26) Quam brevior, simpliciorque sit demonstratio doctrinae Pascalii heic a me tradita, luculenter constabit si §§^{os}. conferas antecedentes, atque *Problema*, *Lemma*, et *Propositionem* ipsius Auctoris pag^{a}. 402da. ac seqq. Voluminis V^{ti}. Collectionis praecitatae in *Adnotatione* 9na. Solummodo dixerim Pascalium ad praecipuum Theorema suum demonstrandum methodum inversam, minusque nativam adhibuisse, comparationem, scilicet, in antecessum Cylindri, et Coni *scaleni*. (Consulatur §^{us}. 13^{ius}). Sectio I^{a}.

(27) Problema sectionis Arcus Ellipseos conicae in *data* ratione difficilius equidem est quam in Circuli Arcu. Universaliter, casu unico excepto bisectionis Hemiellipseos, ad *transcendentia* Problemata pertinet, quum ex adverso multisectio Arcus Circuli, vel sectio in ratione numeris saltem *rationalibus* expressa Problema sit *algebraicum*. Non ita de Areis secandis centricorum aut excentricorum Sectorum Ellipseωs, quod Problema idem unumque est ac sectio Arearum Sectorum Circuli ut in celeberrimo Planetarum *anomaliae verae* e *media* data sistendae Problemate Kepleriano. Illud autem primum sic *mechanice* exponi poterit. „ Dato Circuli Arcu, cuius partes tali excitentur vi gravitatis, quae crescat decrescatve in

 „ ratione

„ ratione *directa* distantiarum a centro virium extra centrum Circuli posito, vel cuius „ elementa eo magis minusve densa aut crassa sint (quemadmodum contingit ge- „ neraliori Problemati de *Catenaria*) in proportione distantiarum earundem, Pondus „ istud in *data* ratione secare „.

(28) Vide §^{um}. 17um., in quo longius porrigitur haec Ellipsium *similium* mutua relatio.

(29) Exinde oritur Theorema praestantissimum „ Superficiem, nimirum, cuiuslibet „ Cylindri scaleni *iacentis*, quaecumque eius Baseos figura fuerit, semper *quadrabi-* „ *lem* esse geometrice „. Fundamenta theoriae Parallelogrammatum universorum tam in Planis, quam in Cylindricis superficiebus iecerunt ante omnes Evangelista Torricellius in *Appendicibus de dimensione Cycloidis et Cochleae* (ad pag^{as}. 85. ac 136. 2^{dae}. numerationis, etsi harum postremae typi vitio turbatae numerus 144. affigi debuerit) eius Operis *de Sphaera et Solidis Sphaeralibus etc.*, Blasiusque Pascalius in Epistola ad Leodiensem Canonicum Renatum-Franciscum-Walterum Slusium, cui titulum fecit *De l'Escalier, des Triangles Cylindriques, et de la Spirale autour d'un Cône* (Operum Tom. V.).

(30) De mirabili foedere trium *Medietatum*, quas Geometrae nuncupant *geometricam*, *arithmeticam*, atque *harmonicam*, post Pappum Alexandrinum (*Collectionum* Lib°. III^{io}.), ne dicam de Tractatu vetustissimo *de Medietatibus* Nicomachi Pythagorici, nec de Eratosthenis *Locis ad Medietates* aut Commentario *de Medietatibus* in duos Libros diviso (Pappi Praefatio ad *Collectionum* VII^{um}.), quorum significationem interpretari haud potis fuit Montucla ad pag^{am}. 252. Voluminis I^{i}., nemo tam eleganter copioseque disseruit quam Vincentius Vivianus in Divinatione sua *De Locis solidis Aristaei senioris* Florentiae publici iuris facta anno M.DCC.I°., sed Hyppoliti Navesii typis excusa vertente anno M.DCC.LXXIII^{io}. in Parte unica Libri III^{ii}. ad Prop^{nes}. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. a pag^{a}. 85^{a}. ad 93^{iam}.

(31) Consulatur *Problema* Pascalii praecitatum in *Adnotatione* 26ta. Pappus Alexandrinus in Praefatione ad Librum VII^{um}. (pag^{a}. 162. *a tergo* Editionis Pisaurensis *Collectionum Mathematicarum* anni M.DC.II^{di}.) idem Problema nunciavit, quod postea omnium primus ostendit Galilaeus in pag^{a}. 507ma. Voluminis II^{i}. eius Operum Florentiae editorum anno M.DCC.XVIII°. = *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove Scienze etc.* =. Hoc ipsum Problema Franciscus Schootenius anno M.DC.LIX°., Petrus Fermatius anno M.DC.LXXIX°. (errat Montucla pag^{a}. 264. T^{i}. I^{i}. dum ait M.DC.LXXV.), et Robertus Simsonius anno M.DCC.XLVI°. demonstrationibus exornarunt in *Apollonii Locis planis restitutis*. Res pendet omnis a 3^{ia}. Propositione

Lib^{i}.

Lib^l. VI^l. Elementorum Euclidis, quam a Matthaeo Stewarto universaliorem redditam perleges in Nota pag^{ae}. 37^{mae}. secundae Editionis *Sectionum Conicarum etc.* Roberti Simson = Edinburgi M.DCC.L. =. Eiusdem demum Problematis meminerunt Montucla in Nota (*a*) pag^{ae}. 174^{mae}. et Num^o. 3^{io}. Notae (*b*) pag^{ae}. 264^{tae}. Voluminis I. *Historiae Matheseos*, mea *Prolegomena* Theoriae novae *Magnitudinum Exponentialium etc.* ad pag^{am}. XXXII^{am}., aliique permulti. Geometra quidam olim mihi proposuit determinationem anguli, quem Quadratrix Dinostrati efficiat in puncto concursus A (Fig^a. 73^{ia}.) cum Circulo genitore. Id protinus ex Problemate, quod nunc tracto, consequitur. Nam si fiat $OB:OC:OD \div$, ducaturque AD, et huic (si placeat) normalis AI, erit quaesitus angulus $CAB = ODA = OAI$, eoquod DA tangens, AI Quadratrici normalis ex inventis a Vincentio Leotaudo Iesuita in sua *Cyclomathia etc.* Lugduni impressa vertente anno M.DC.LXIII°. (Consulatur Liber III^{us}., cui cl. Auctor titulum fecit *Quadratricis facultates inauditae proferuntur*, et signanter Propositio 27ma. ad pag^{am}. 47^{mam}.).

(32) In aperto est quod, nisi Radiorum excentricorum ordo apte inverteretur, Sinus-Recti Angulorum obliquitatis $\frac{X'N}{X'A}$, $\frac{X''N}{X''A}$ etc., utpote Sinu-toto aut 1 maiores, evaderent *imaginarii*. In quam Formulae cuiusvis universaliter expressae impossibilitatem effugiendam tum, quum Problematum resolutio aeque possibilis maneat, artificium consimile passim Algebra docet. Legatur prae ceteris ad pag^{am}. 23^{iam}. Volumen IV^{um}. *Opusculorum Mathematicorum* Alemberti, quo loci agit de Integrali $\int dx\sqrt{2x - xx}$. Patet insuper *continuitatem* geometricam sartam tectam hic esse quia dum $\frac{X'N}{X'A}$ etc. Sinum et Angulum indicet positivum, $\frac{X''N}{X''A}$ etc. negativum denotat, et vicissim, ex Analyseos Cartesianae Elementis, quidquid sit de dubitationibus ab Alemberto in Legem *continuitatis* oppugnandam promotis tam in Elogio Ioannis Bernoulli (*Melanges de Litterature, d'Histoire, et de Philosophie etc.* a pag^a. 11ma. ad 68^{vam}. 4^{ae}. edit^{nis}. Amstaelodamensis anni M.DCC.LXVII^{mi}. T. II.), quam in *Memorabilibus* Berolinensis Academiae pro anno M.DCC.LI^{mo}.

(33) Etiam heic, ut in Sinubus-rectis obliquitatis Cylindrorum (vid. *Adnot.* praec.), sancte *continuitas* servatur. Nam suppositis Semiaxibus *coniugatis* AI, AI' etc. positivis, sequuntur AI'' etc. negativi in geometrica constructione.

(34) Puncta sibi invicem respondentia X', X'' ad harmonicas, geometricasque Proportiones illas determinandas, liquido constat inveniri praesidio Tangentis $X'S$ a puncto *dato* ad Circumferentiam Circuli $ABCD$ ductae. Proportiones autem ipsae

harmo-

harmonicae praeter Circulum, omnibus etiam conveniunt Sectionibus Coni, eodemque Tangentium fundamento innituntur, quemadmodum Elementa Conica docent.

(35) Quum in hac constructione cesset Cylindri consideratio, neque ideo locus sit Sinubus-rectis obliquitatis etc. ut vidimus in *Adnotatione* 32[da]., abest omnino periculum *imaginarii* valoris, qui saepe Formulas Functionibus Circuli involutas perturbare solet, earumque nativum progressum cohibere.

(36) Gemina haec Ellipsis, quam in praesentia consequimur, diserteque rursum in §°. 25[to]. ab ore Geometriae, confirmatur a Calculi oraculo in §°. 28[vo].

(37) Qui Geometriae religionem erroris arguunt aliquando, a pura Geometriae doctrina perquam maxime aberrant. Exemplo sit *Indivisibilium* methodus Cavaleriana, cuius si qui fuerint lapsus, non ipsius methodi vitio, sed Mathematicorum imperitiae sunt adscribendi. In MS. Torricellii Palatino (*Nota* 47.) aureum exstat Opusculum, cui Vivianus titulum fecit *De indivisibilium doctrina temere non usurpanda*.

(38) *Miscellanea Berolinensia* in Volumine I°. pag[a]. 183[ia]., *Iohannis Bernoulli Opera* in Volumine I°. Num[is]. LXXVII°. LXXVIII°. LXXIX.° LXXX[mo]. ac praesertim pag[is]. 447. 448., *Commercium Philosophicum et Mathematicum etc.* Leibnitii ac Bernoullii editum anno M.DCC.XLV°. Lausannae et Genevae ad N[um]. C.LXXV[um]. II[i]. Voluminis, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* in Volumine II[d]. pro anno M.DCC.XLIX[no]. pag[a]. 24[ta]. et §[o]. 44[to]. in Corollario III[io].

(39) Distat itaque longissime a veritate *regula* practica, qua passim utuntur Architectorum plerique in Ovalium Conicarum perimetros determinandas, utpote quae ipsas statuat aequales Circularibus Circumferentiis, quarum Radii fuerint *medii* arithmetice proportionales inter Semiaxes Ovalium earundem, aut Semiaxium illorum peraequaverint semisummam. Sed haec fortasse subtiliora, et nimis salebrosa videbuntur vulgaribus Geometricae praxeos, ac rei Aedificatoriae magistris, discipulos adhuc docere assuetis Peripheriam Circuli triplae Diametro parem esse.

(40) Bernoullius I°. c°. in *Adnotatione* 38[va]. Semicircumferentiam Circuli octifariam tantum secando ad Perimetrum Ellipseos datae, cuius Axes sint veluti 5 ad 4, adeo proxime se accessisse fassus est, ut error fractione tenuissima $\frac{1}{6000000}$ minor fuerit. Quodnam celerrimae adpropinquationis miraculum dum *n* octonariam divisionem exsuperaverit?

(41) Punctum etenim, a quo rectae excentricae emanant, non modo in Diametro Circuli (ut placuit Bougainvillio in Capite IV°. *Introductionis* in Calculi Integralis Tractatum), verum etiam in productione Diametri collocari potest. Ita est

in

in Opere Caroli Walmesleyi, edito Lutetiae Parisiorum anno M.DCC.XLIX°. „*Analyse des mesures etc.*„ atque in Capite VII°. ad Num^{um}. 325^{tum}. et pag^{am}. 478^{vam}. meae *Theoriae magnitudinum Exponentialium etc.*, qua primum divisio Circuli infinities quoque iterata consideratur.

(42) Pascalius in *Problemate*, cuius meminit 26ta. *Adnotatio*.

(43) Collectio toties memorata Pascalii Operum ad calcem praecitatae Epistolae Hugenio missae Calculi istius ab auctore conscripti verba facit, sed eius tantummodo deductiones ultimas continet. Huiusce iacturae reparandae spes omnis fracta, eoquod neque in Operibus variis (*Mesolabum etc.* ad Leopoldum Mediceum etc. *Accessit pars altera de Analysi et Miscellaneis*) Renati Slusii, Leodii Eburonum excusis anno M.DC.LXVIII^{vo}., nec alibi, facturam illius Calculi invenerim. Eodem etiam Calculo innituntur Perimetri Epicycloidum, atque Hypocycloidum, quemadmodum constat ex Corollario I°. Propositionis IV^{ae}. Sectionis IX^{ae}. *Analyse des Infiniment-petits = par M. le Marquis de l'Hôpital =*, ac praesertim ex pag^{a}. 220ma. editionis Avenionensis.

(44) A critica de Cycloidis controversiis Actorum comparatione procul dubio deducitur Renatum Cartesium in Gallia, Vivianumque adhuc adolescentem in Etruria tangentes eiusdem Curvae omnium primos duxisse, sed motus legibus in auxilium vocatis (*Lettera ai Filaleti di Carlo Dati* occulto nomine Timauri Antiatis Florentiae excusa anno M.DC.LXIII^{io}.; *Clarissimo Viro Robervallio Evangelista Torricellius etc.*, scilicet, Epistola scripta Kal. Oct. M.DC.XLIII. ad pag^{am}. 283^{iam}. Operis Collectanei *Diver Ouvrages etc.* pluries indicati, ubi haec verba adnotantur *tangentem praedictae lineae iam ostenderat mihi Vincentius Vivianus Florentinus Clarissimi Galilaei alumnus, etiam nunc adolescens*; Academiae Scientiarum Parisinae *Veterum Memorabilium* Volumen VI^{um}. inter alia Parisiis et Hagae-Comitum impressa, ubi pariter exstant Epistolae Torricellii et Robervallii; *Traitè generale de la Roulette* a Pascalio compositus usque ab anno M.DC.LVIII°. in Operum suorum *Collectionis* Volumine V°.; Vita Cartesii a Bailleto scripta in Capitibus XIII^{io}. XIV^{to}. ac XV^{to}. Libri IV^{ti}.; Historia Cycloidis a Groningio exarata anno M.DCC.I°.; Opusculum Rogerii Iosephi Boscovich *de Cycloide et Logistica* in II°. Volumine Andreae Tacquet editionis Romanae anni M.DCC.XLV^{i}.; Volumen II^{um}. Historiae Mathematicae a Montucla typis vulgatae pag^{a}. 42da. et seqq. etc. etc.). Fundamentum antiquae methodi principiis motus innixae legitur in Propositione XIV^{a}. Sectionis II^{dae}. praedictae *Analyseos* Hôpitalianae (p^{a}. 51^{a}.). Mea vero methodus, omnium brevissima

vissima ac simplicissima, dum geometricum rigorem servat, eadem est pro tangentibus omnimodarum Cycloidum determinandis, miraque praestat analogia.

(45) Idem opibus impetratis a Calculo *differentiali* repertum fuit ab Hôpitalio in Exemplo II^{do}. ad pag^{am}. 22^{am}. praecitatae editionis. Ridendus eqoidem Anonymus ille ipsius editionis Scholiastes, qui in Adnotationibus XI^{ma}. ac XII^{ma}. Hôpitaliom solas heic *primariae* Cycloidis tangentes contemplatum fuisse monoit, etsi *litteraliter* ad omnigenas Cycloides, et praecipue a Circulo genitas, calculum formulamque suam adplicuerit, ipseque Anonymus pag^{a}. 303^{ia}. eandem formulam universalem, aequationemque, proprietatemque, a qua oritur, Cycloidum omnium eiusmodi $bx = ay$ confessus clariter fuerit. Sed de hisce Scholiastis Galli Commentationum rarioribus *elegantiis* plura disserere inverecundom esset, nimiomque molestum. Fermatius Gallis ipsis fatentibus (*Encyclopaedia* Parisiensis in vocabulo *Cycloide* num^{o}. 3^{io}.) tangentes Cycloidum praeter *primariam* mendose determinavit „ *Que le premier qui en a trouvé la tangente, a été M. Descartes, et presque en même temt M. de Fermat, quoique d'une maniere défectueuse etc.* „: neque admirari unquam desinam idgenus errorem non vidisse, nec castigasse Montuclam p^{a}. 48va. II^{di}. Voluminis. Ut lapsus iste emendetur, expressio Montuclae, quae Cycloides *secundariae* cum *primaria* confundit „ *le segmente PT est à l'arc AP ou l'ordonnée PQ* „ geometrico sensui restituatur necesse est modo sequenti. „ *Comme la circonférence du cercle générateur à la base ainsi PT à PQ, ou AP à PQ; donc PT = AP* „ (Fig^{a}. 20. Montuclae), quod adamussim meae deductioni cohaeret. Ceteroquin eandem significationem tribuo Circulo Cycloidom genitori, quam, utpote faciliorem clarioremque, adhibuerunt Pascalius, Encyclopaedia, atque Montucla in l^{is}. c^{is}., illum scilicet nomino, cuius diameter sit axis Cycloidis. Quo universaliter posito Cycloides *contractae* et *protractae* eodem cum *primaria* axe gaudentes a *primaria* ipsa nascuntur sine ulla motus consideratione, et absque puncti describentis Curvam aut in Circumferentia siti, aut extra, aut intra, Circuli super Rectam revoluti discrimine. Consimili itaque pacto, quo a Circulo oriantur Circuli *protracti* vel *contracti*, sive Ellipses super eundem Axem dispositae, productis, sectisve proportionaliter Ordinatis, idemque de Hyperbolis, Parabolis, Curvis Cyclocylindricis, Ungulis in Cylindro recto abscissis, Helicibus Apollonianis etc. etc. sentiendum sit, haud diverse a *primaria* Cycloide *secundariae* dimanant, si eius Ordinatae ad Circumferentiam genitoris Circuli proportionaliter aogeantur, seu minuantur. Quibus exemplis satis superque confirmatur tangentes Cycloidum omnium eiusdem Axeos (ut in Ellipsibus etc. etc.), quae ab extremis Arcuum communem Abscissam habentium educantur, in eodem puncto concurrere, punctaque concursuum innumera in eâdem communis Circuli genitoris Evoluta locari, tametsi de Cycloide tantum *primaria* Geometrarum quamplurimi id adseruerint. Huic ratiocinationi illustrandae haud parum inservient dicta in §^{o}. 57mo.

(46) Hoc

(46) Hoc punctum *fixum* K in qualibet Cycloidum exacte congruit puncto H Schematis a Pascalio depicti initio citatae Epistolae ad Hugenium, a quo puncto rectae emittuntur *repraesentantes* (sive *vicariae*) ab eo nuncupatae.

(47) Constructio Torricellii, quam pro Tangentibus ad Cycloides *secundarias* ducendis sine demonstratione ac figura protulit in *Scholio de Cycloidibus aliarum specierum* ad calcem *Appendicis* prioris, cuius mentio in *Adnotatione* 29na., et schemate adposito ac demonstratione *mechanica* exornavit in MS. Palatino *Originali di alcune Opere del Torricelli*, fastidiosior prolixiorque est, sed nihilominus eodem redit. Iubet enim egregius ille Geometra quod a puncto *dato* D ducatur recta longitudinis cuiuslibet DQ tangenti EF parallela Circuli genitoris, deindeque a puncto Q recta altera QF Cycloidis basi AC parallela. Quo facto abscindi debet in postrema rectarum pars huiuscemodi QF, cui sit DQ ut *radius Circuli proprii ad radium Circuli primarii*, scilicet, ut $OG : OK$ (vid^{ti}. §^{us}. 12^{mus}.), vel $IH : IE$; in qua revera proportione ex mea methodo constat esse debere $FE : ED$, sive $DQ : QF$ propter indubiam Triangulorum EIH, DEF similitudinem. Ceterum ex theoria motus compositi demonstrationem suam Torricellius deduxit, non secus atque id effecerat de tangente Helicis Archimedeae, tametsi ab incunabulis usque Geometriae, id testante Plutarcho tam in *Marcello*, quam in *Symposiacis*, mechanicarum facultatum in re geometrica usum Plato ὁ θεῖος perquam maxime reprobaverit.
„ Eudoxum atque Archytam Tarentinum ac Menechmum reprehendisse dicitur quod
„ Geometriam ad Mechanicam, quae motu exercetur, traduxissent, atque Philoso-
„ phiam prostituissent „.

(48) A mea quoque theorice puncta *singularia* flexus-contrarii, nodique, a Cartesio prae omnibus animadversa in Cycloidibus *secundariis* (Montucla T. II. p^{a}. 48.), facillime derivantur. Primum enim in Cycloide *contracta* Fig^{ae}. 11^{mae}. punctum T variationis Curvae ex concava in convexam versus Basin AGC, aut vicissim, illud est ubi tangens parallela fiat Axi BG, scilicet, punctum ubi Ordinata KT (quae ideo *maxima* est) in eâdem sit directione cum KX a *dato* puncto K super Axem BG perpendiculariter elevata. A puncto *dato* A si praeterea ducatur AZ Basi normalis, haec in perimetro Curvae determinat punctum Z intersectionis aut *nodi* ramorum confinium Cycloidis. Cuius Folii $ZTAY$ axis AZ *datus* est ex constructione, ordinatarum *maxima* $TY = 2TR$ pariter *data*, punctum R, in quo postrema axem suum secat, etiam *datum* propter $AR = GK$, tangens in vertice A *data*, utpote quae sit Basis AG perpendicularis ad GK, nempe ad axem ARZ, angulusque demum ramorum in puncto *duplici* Z, sive angulus geminarum tangentium, facillime cognoscitur semel atque ducta Ordinata ZSP, et a puncto K recta KS, praemissa de tangentibus nos doceant peraequare duplum anguli *dati* SKX, ita ut angulus iste SKX inclinationem alterutrius ramorum Folii TZ, ZY super axem AZ dimetiatur. Aeque simpliciter in Fig^{a}. 12ma. Cycloidis *protractae* punctum *inflexionis* determi-

determinatur. Etenim si a *dato* puncto K ad Circumferentiam genitoris emittatur tangens KS, et per S transeat Ordinata Curvae ST, punctum eius extremum erit *flexus* quaesitus, in quo concavitas convexitati subest, atque vicissim. Nam tangens in T, eoquod perpendicularis rectae KS ex praeostensis, parallela erit Radio OS. Quum autem angulorum, quos Secantes innumerae efficiunt in K eum Axe, *maximus* sit BKS ex Circuli natura, tangens praedicta *minimum* angulorum cum ipso Axe conficiet, et idcirco existit in puncto T *flexus-contrarius*. Duo puncta T, T in Fig^is^. 11ma. ac 12ma. eo propius Ordinatis suis adcedent ad centrum O genitoris (ideoque et ad verticem Curvae B) quo magis *contractae*, *protractaeve* Cycloides fuerint, sed nunquam centro respondebunt, quod iure dixeris adcessionum asymptoton. Secans quaelibet per punctum K ducta duo statuet puncta in Circulo genitore E, E', per quae transeuntes Ordinatae occurrent Curvae, superius concavae, inferius convexae versus Basim, sed in huiusmodi punctis, ut emissae tangentes sint aequidistantes inter se, vel aequaliter Axi, Basique inclinatae. Cuncta haec, pluraque alia a me praetermissa satis sunt ad demonstrandum non denegatum iri Geometriae elementari adcessum ad sublimiora doctrinae Curvarum. Id saepius, et bonis avibus molitus sum in Disquisitionibus, quas adhuc ineditas servo, exemplaque alia subiiciam oculis in III^a. Sectione.

(49) Theorema igitur statui poterit haud inelegans „ Perimeter Cycloidis *primariae* ad suam Basim est ut Perimeter Quadrati cuivis Circulo circumscripti ad Circuli inscripti Circumferentiam „. Quam autem fastidiosa elaborataque nimium sit in communi methodo Geometrarum *rectificatio* unius *primariae* Cycloidis vide in Num^is^. 12°. ac 13^io^. ad pag^as^. 182. 183. 184. praecitati *Opusculi* Boscovichii, de quo *Adnotatio* loquitur 44^a. Montucla in II^do^. Volumine *Historiae Matheseos* ad pag^am^. 59^nam^. pro *rectificandis* omnimodis a Circulo genitis Cycloidibus ope Ellipsium ad *Calculum Integralem* confugere Lectorem exoptat, ut a Pascalio tradita intelligat, et veritati consona esse sibi suadeat. *On démontre facilement ce rapport des courbes cycloïdales avec l'ellipse par le moyen du calcul intégral. Car l'expression différentielle ou de l'élément de cette courbe, est absolument semblable à celle de l'élément de l'arc elliptique.* Idgenus experimentum facillimum quidem. Nam numeratis a vertice in Axe Cycloidis, qui sit $= a$, Abscissis, vocatoque *m exponente* rationis inter Basin et Circuli genitoris Peripheriam suppositam $= 1$, Aequatio Curvae est $y = \sqrt{ax - xx} + m\,(\text{Arc.}\,(\text{Sin.}\,\sqrt{ax - xx}))$, ex qua suboritur $\sqrt{dx^2 + dy^2} =$

$$dx \,.\, \frac{\sqrt{\frac{a^2(m+1)^2}{4} - amx}}{\sqrt{ax - xx}}$$

. Hoc autem Differentiale, dum fiat $x =$

$$\frac{\frac{a^2}{4}(m+1)^2 - z}{am}$$

, illico vertitur in Differentiale huius formae

$\frac{-dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz-zz-gg}}$, per II[dae]. Sectionis praecepta cum illa elementi Arcus Ellipseos conicae consentientis. Facto $m=1$ emergit Arcus *primariae* Cycloidis $= \int \frac{dx\sqrt{a^2-ax}}{\sqrt{ax-xx}} = \int dx\sqrt{\frac{a}{x}} = 2\sqrt{ax}$; quod Wrenni invento adamussim cohaeret. Veruntamen semel atque inventa Wrenni et Pascalii faciliter elariterque sola duce Geometria demonstrari poterant, nonne Matheseos Historicum dedecet a Calculo Integrali praesidium exposcere in eis explicandis, quae circa dimidium antecati saeculi resoluta iam fuerant feliciter? Nonne qui ita fecerit in Historiae Mathematicae leges, et in rem Chronologicam peccasse censendus erit? Nonne et Robervallius citandus fuerat, quippe qui in Opusculo suo *De longitudine Trochoidis* (pag[a]. 274[ta]. *Divers Ouvrages etc.*) idipsum Problema faciliter admodum enucleaverit?

(50) Ita Pascalii Calculi fructus sine Calculo restituitur. Ait enim Pascalius l°. c°. Semiellipsin sua perimetro Cycloidi *datae* in toto atque in partibus aequalem Semiaxes habere hac arte reperiendos. „ Fiat ut Circumferentia generatoris ad istius et Baseos Cycloidis Summam, sic Diameter generatoris ad quartam proportionalem, quae erit maior Semiaxium Ellipseos quaesitae. Praeterea fiat ut Summa Circumferentiae genitoris et Baseos Cycloidis ad Differentiam Circumferentiae ac Baseos ipsius, sic Semiaxis inventus ad alterum Semiaxem, qui erit minor Ellipseos „. Prima proportio eadem est cum $BO : BO + OK :: BG$ aut $2BO : 2(BO + OK) = 2KB$. Secunda vero eodem redit cum $BO + OK = KB : BO - OK$ aut $OK - OB = KG :: 2KB : 2KG$. Erunt igitur ex Pascalio Semiaxes Ellipseos maior et minor $2KB$, $2KG$, iidem scilicet a me superius deducti. (Wallisius eandem εὕρησιν adgressus est, quemadmodum liquido patet ex *Operum* eius *Mathematicorum* Volumine I[mo]. ad pag[as]. 538[vam]. 39[nam]. et 40[mam].).

(51) Pascalius alio etiam modo idem exprimit. „ Perimeter Hemicycloidis illam adaequat integrae Ellipseos conicae, quae, dum Cyclois *primaria* fuerit, in duplum vertitur Axeos Curvae, sive Diametri genitoris „. Ellipsis ista est *ABCD* in Fig[a]. 13[ia]., cuius Axis maior *BD* aequalis *BK* Cycloidis *datae*, minor autem $AC = KG$.

(52) Hoc Corollarium ad calcem Epistolae suae Pascalius protulit, demonstratione tamen omissa.

(53) Evangelista Torricellius in MS. Palatini fasciculo, cui Vivianus collector titulum fecit *Aggiunta di altri Fogli trovati*, depicta Ellipsi haematite rubro isthuc ipsum contemplatus fuit pro sola Cycloide *primaria*, quam semper cum Mathematicis Italis pene omnibus nuncupat *Galilaeicam*, tametsi Marinus Mersennus ex Minimorum familia Cycloidem atque Ellipsin conicam unam et eandem esse Curvam male fuerit auspicatus dum primum Cycloidem ipsam animadverterat.

(54) In loco Torricellii citato demonstratione carens hoc exstat de Octagono regulari

Theorema. „ Altitudo Octagoni constat ex *duobus Lateribus* Quadratuli et Diametro „. Auctorem currente calamo errasse non iniuria putaverim. Est enim „ altitudo Octagoni par Summae *Lateris* et Diametri illius Quadratuli erecti super semissem ipsius lateris Octagoni „. Revera in Fig[a]. 74[ta]. posito in I Polygoni centro habetur $BO:OI::BA:AD::AC:CD::AC:IC+AI$, scilicet ob $AC=IC$, quum angulus AIB semirectus sit, in ratione Lateris ad Latus cum Diagonali Quadrati etc.

(55) Inscriptum semper adpello Triangulum commodo verborum inserviens, quamvis non ita sit ad vocabuli rectam fidem servandam in *protractis* Cycloidibus. Ceterum modus iste dimetiendi unius Theorematis ope Areas omnigenarum Cycloidum Circuli exstat in MS. Torticelliano ubi agitur de Cycloidibus, nimirum earum Spatiis, atque Tangentibus.

(56) Eodem iure nuncupari possent ex Sereni Antissensis doctrina Ellipses cylindricae. Eae sunt, quas Galli vocant vernacula lingua *Ovales du Jardinier*, atque in Fornicum Testudinumque praxi Ellipsibus *spuriis* posthabere solent (*Anses de panier*), utpote quae sint maioris in Architectura elegantiae, faciliorisque organicae descriptionis. Ellipses veras ac spurias aliquantisper illustrant *Perelliana* mea hactenus inedita, et *Commentatio de Florentino Ponte* percelebri SS[mae]. *Trinitatis*.

(57) Ita universalius redditur Problema Pascalii, cuius mentio facta in §°. 10[mo]. et *Adnotatione* 42[da].

(58) Huc profecto redit Problema petinsigne Archimedis de dimensione Superficiei Coni *recti*, memoratum in §°. 65[to]. Igitur toto iure adscribenda complanatio illius Conicae Superficiei doctrinae Pascalii.

(59) Neminem latet idem valere de Conis etiam *negativis*, quorum vertices in inferiori collocarentur Semicircumferentia, etsi non depicta, quemadmodum Cylindris pariter *negativis* contingere in *Adnotatione* 32[da]. superius monui.

(60) Consulatur *Adnotatio* 31[ma].

(61) Est in Schemate eodem adposito $CL^2:AL^2::CO^2:AO^2::CL^2-CO^2:AL^2-AO^2::4OZ.CZ:4OZ.BZ::CZ:BZ$ ex Elementis; quod erat in desideratis. Igitur ex praeostensis in §°. 2°., ducta a quolibet punctorum D ordinata DN, ut vera sit haec Proportio $AO:AD::CO:CD$, aut $AO^2:AD^2::CO^2:CD^2$, vel $AB^2+BO^2:AB^2+BO^2+2ON.BZ::CO^2:CO^2+2ON.CZ$, sufficit veram esse tantummodo Proportionem $AO^2:CO^2::BZ:CZ$, quam nuperrime demonstravi.

(62) Ex. gr. iisdem positis, ac secta bifariam CP in Q, erunt $AO^2=2.BZ.OQ$, $AL^2=2BZ.LQ$, $AL^2:AO^2$, vel $LP^2:PO^2::LQ:QO$, unde $LQ:PQ:OQ$ ∺ quemadmodum habet §[us]. S[vus]. prope signum Adnotationis 34[tae]. Insuper si ZI fuerit Media geometrice proportionalis inter CZ, ZB, erit $CO:AO::CZ:IZ::IZ:BZ$. Cetera linquo. Occasio huiusce Theorematis alterum mihi in mentem revocat elegantissimum,

tissimum, quod olim in MS^{o}. ineditorum Torricellii perlegi (ad Num^{um}. rubrum I. pag^{a}. 8va., et rursus ad Num^{um}. 131.). „In Triangulo quolibet orthogonio (Fig^{a}. 75^{a}.) secta in *D* eius Hypothenusa *BC* ita, ut *CA*, *AB*, *CB*, *BD* sint in Proportione arithmetica, et *BD* bifariam divisa in *I*, erit Area Trianguli aequalis Rectangulo segmentorum *BI*.*IC*„.

(63) Consule §^{um}. 7^{mum}. prope signum *Adnotationis* 29^{nae}.

(64) Nunquam etenim in Cylindro *scaleno* (secus atque in Cono) Ellipsis plano genita Basibus non parallelo Circulus evadere potest. Coni autem *iacentis* Superficies (qui tamen vere Conus non est) a Circulo pendet (Vid. §^{um}. 54um.).

(65) His quoque adnumerandus esset Iesuita P. Coursierus, qui Lutetiae Parisiorum vertente anno M.DC.LXIII^{io}. typis Simeonis Pigeti Opusculum in lucem edidit sic inscriptum *De sectione Superficiei Sphaericae per Superficiem Sphaericam, Cylindricam, Conicam. Item Superficiei Cylindricae per Superficiem Cylindricam, atque Conicam. Denique Superficiei Conicae per Superficiem Conicam*. Titulo tenus, nominibusque altisonantibus *Ellipsium Curviregarum, perfectarum, imperfectarum etc., Circulorum Curviregorum etc.*, miserrimum Opus in tres Libros divisum, cui Venusini Poëtices effatum illud optimo iure adplicari nullus dubito *Parturient montes etc. etc.*

(66) Legantur Volumina praecitata in *Adnotationibus* 3^{ia}. et 4ta., ac praesertim primum ad pag^{as}. 213. et 221., alterum passim in Libro II^{do}. Curvam Cyclocylindricam alii vocant, et potissimum Guido Grandus, Sphaerocylindricam. Lalovera ipsam Lineam Cyclocylindricam, aut marginem Ungulae semiorthogonalis Cylindri recti, vel potius in plano expansam Lineam Sinuum, nuncupat *Cycloidem parvam*, ne confundatur cum vera Cycloide, cui nomen praebet Torricellianae. De antiqua epocha Cyclocylindricae vide *Notam* in calce pag^{ae}. 550^{mae}. mei Operis *Magnitudinum Exponentialium etc.* (Iohannis Wallisii *Operum etc.* Tom^{us}. I^{mus}. ad pag^{as}. 556^{tam}. ac 557^{mam}., quo loco iterum impressi (a pag^{a}. 489na. ad 570^{mam}.) fuerunt *Tractatus duo etc.*, in lucem iam editi Oxonii vertente anno M.DC.LIX^{no}). (Consule insuper *Adnotationem* 5^{tam}.). (Ipsius Wallisii *Mechanica etc.* ad Litteras *M*, *N*, *O*, Prop. XIII. Cap. V. paginasque 707^{mam}. et 708^{vam}. Voluminis I^{mi}. eius Operum in lucem editi anno M.DC.XCV^{to}.).

(67) Pascalii Tractatulum iam memoravi in *Adnotatione* 29na.

(68) *Tracer sur un Cylindre droit un espace égal à la superficie d'un Cylindre oblique donné ; et d'un seul trait de Compas.* (l. c.) (a pag^{a}. 221ma. ad semissem usque 230^{mae}.).

(69) Aucto-

(69) Auctoris methodus *decem* paginas implet veteris Voluminis Academici *in folio* impressi, solaque epitome tribus absolvitur paginis.

(70) *Tracer sur un Cylindre droit un espace égal à un Quarré donné ; et ce d'un seul trait de Compas* (l. c.). Problema istud absumit paginas *octo* eiusdem Voluminis, scilicet, a pag^{a}. 213^{ia}. ad 221^{mam}.

(71) Huc redit Propositio XXI^{ma}. Libri II^{i}. Operis Laloverae, nomenque Auctor tribuit hisce Cyclocylindricis *secundi nominis primariarum*. Demonstratio ab eo data praeter morem fastidiosissima. Grandus obiter in Scholio Propositionis XXIV^{tae}. ad pag^{am}. 120. et seqq. *Geometricae demonstrationis Vivianeorum Problematum*, sed principio innixus indirecto, nova methodo isthuc ipsum ostendendi usus est, absque eo quod nominaverit Laloveram primum *quadraturae* huiusce inventorem. Ceteroquin quo loci Montucla ad pag^{as}. 56. 57. II^{i}. Voluminis *Historiae* suae ait Laloveram (*Laloubere* pronunciationis vitio) demonstrasse mensuram Arearum Cyclocylindricarum haud quadrabilium ope Superficiei Cylindri *scaleni* aut in errorem lapsus est, aut saltem obscure loquutus, quemadmodum in Capite VII°. *Magnitudinum Exponentialium etc.* (ad pag^{am}. 554^{tam}.) et alibi fusius explicui. Scripsit etenim Historiographus ille de Lalovera. *Il montre* . . . . . . que *si la pointe mobile* d'un compas *n'atteint pas à cette extrémité* du diametre etc., *la figure retranchée de la surface du cylindre en question, sera égale à celle d'un cylindre oblique déterminé*. Veruntamen demonstrationem suam a Pascalio mutuatus est Lalovera, ut ipse fatetur in Corollario II^{do}. Propositionis XXVI^{ae}. sive postremae Libri II^{i}. *Figuram, cuius dimetientes aequales sunt rectis ex puncto uno* (excentrico) *eductis esse aequalem superficiei Cylindri scaleni demonstravit Dettonvillaeus in Epistola data ad D. De Huggens, unde factum est ut ex demonstratione perlecta istud nos lucrum perceperimus pro praesenti et superiori propositione, nimirum superficiem Cyclocylindricae secundariae* . . . . . . *esse certa quadam ratione aequalem superficiei Cylindri scaleni; ac proinde data huius scalenae superficiei quadratura inventum esse a nobis tetragonismum Cyclocylindricarum secundariarum, de quibus agunt duae huius Libri postremae propositiones*. Exstant in Volumine V°. Pascalii Operum *Collectionis* argumenta epistolica ipsius Laloverae, a quibus constat anno M.DC.LVIII°. Pascalio scripsisse nondum Areas Cyclocylindricas potuisse metiri. Demonstratio posterius reperta fundamentum habet in Propositione V^{ta}. Libri II^{i}. ad pag^{as}. 33. 34. 35. Operis in *Adnotatione* 105ta. postmodum nominati (vide quoque Vivianum in Prop^{ne}. VII^{a}. Libri III^{ii}. ad pag^{am}. 55^{tam}. *De Locis Solidis etc.*) a Fermatio restituta, et in Praefatione ad Lib^{um}. VII^{um}. Pappi iamdudum expressa.

(72) Iesuita Gregorius a Sancto-Vincentio in Parte III^{ia}. Lib^{i}. IX^{i}. Voluminis II^{i}. Prop.

Prop. XLV. XLVI. XLVII. ad pag[as]. 991. 92. 93. *Operis geometrici quadraturae Circuli et Sectionum Coni etc.* Domui Austriacae semper Augustae dicati, et Antuerpiae impressi apud Meursios vertente anno M.DC.XLVII°., omnium Geometrarum primus (quidquid contra sentiat De La Hire id decus tribuens Pascalio in Actis Academiae Parisiensis anni M.DCC.VII[i].) *quadraturam* Ungulae huiuscemodi in lucem publicam edidit. Tractatus enim Pascalii de eodem argumento, cui titulum fecit *Traité des Sinus du quart de Cercle* (T. V. etc. edit[nis]. Hagae Comitum), plusquam decem post annis excusus fuit. Robervallii autem Opus *de Indivisibilibus*, ubi de Sociae Cycloidis, *Figure des Sinus*, aut Ungulae dimensione loquitur, typis editum anno M.DC.XCIII[°]. (*Adnot.* 3) (*Divers Ouvrages etc.* ad pag[am]. 194[tam].). Adnotatio Pascalii Operum Editoris in *Traité generale de la Roulette* deperditam quandam Auctoris illius praestantissimi Lucubrationem moerens adfirmat hisce verbis *Nous n'avons pas ce Traité ; heureusement il peut être supplée par celui des Sinus du quart de Cercle*. Nullum autem deesse Tractatum censuerim, illumque rebus Pascalii deperditis adnumeratum Epistolam esse de Cycloidalium omnium Curvarum dimensione Detonvillii ad Hugenium toties antea citatam.

(73) Lalovera, atque Grandus utramque contemplati sunt Cyclocylindricarum speciem in locis paullo ante citatis. Et admodum facile est demonstrationem, quam supra dedi pro puncto X, etiam pro altero X' iisdem pene verbis retexere.

(74) Scilicet in *Perellianis* hactenus ineditis, quibus titulum feci *De Thoma Perellio a Paulo Frisio laudato Enarratio Geometrica*.

(75) Montucla de Linea Sinuum, aut socia et gemella Cycloidis, sive expansa Ungulari (*Notam* consule 66[am].) ad pag[am]. 60[mam]. II[i]. Voluminis loquens videtur eam Curvam limitare arctioribus quam par esset confinibus. *La partie AD de la courbe dont nous parlons, est la même que la courbe appellée des sinus etc.*, perinde ac si portio etiam inferior Linea Sinuum non fuerit. In Memoria XXXVI[a]. sive postrema Voluminis V[ti]. Partis I[mae]. ad pag[am]. 227[am]. *Opusculorum Mathematicorum* Alembertus scribit Curvam, cuius Abscissae sint z, Ordinatae autem λ *Sin.* z, esse Trochoidem communem, in qua Ordinatae *Sin.* z augeantur vel minuantur in ratione $\lambda : 1$. Alteram Trochoidem eodem loco adserit esse *protractam* aut *contractam* in ratione $\nu : 1$ Curvam illam Abscissas z, Ordinatas *Sin.* νz habentem. Verumtamen, meo saltem iudicio, neutra Trochois est. Nam prima congruit cum Linea Sinuum *secundaria* vel *secundaria* Trochoidis socia. Huiuscemodi est Curva, in qua flectitur Chorda vibrans, uti iam dixi, ex perantiqua theoria a Daniele Bernoullio valde promota in *Commentariis* Berolinensibus anni M.DCC.LIII[ii]. (a pag[a]. 147[ma]. ad 173[iam]. et iterum a 173[ia]. ad 196[tam].), ubi etsi Scriptor egregius eam clariter nuncupaverit *la compagne d'une cycloïde extremement allongée*

 (lin[a].

(lin^{a}. 1^{a}. p^{ie}. 148^{vae}.), mirandum est eodem in Volumine Leonardum Eulerum ad pag^{am}. 197^{am}. ac §^{um}. XI^{um}. ipsam iniuria adpellavisse *trochoïde allongée simple*. (Vide §^{um}. hunc, in quo sumus, paullo superius). Altera nec Trochois *secundaria*, nec *secundaria* est Socia Trochoidis, sed alia Curva transcendens *sui generis*, ut ex praemissis cuilibet patet. Nam ut *Socia etc.* fieret, non *Sin. vz*, sed *v Sin. z*, admodum diversae significationis atque valoris, deberet esse Ordinata.

(76) Quaelibet enim pars Perimetri Helicis super Cylindrum iacentis est ad Arcum subpositi Circuli ut Radius ad Cosinum Anguli inclinationis, et ad interceptum Cylindri Latus ut Radius ad Sinum. In planum expansam hanc Helicem omnes norunt in Lineam rectam se vertere. Helix ista eodem redit cum Cochlea Archimedis. Linea est equidem celeberrima in Graecorum veterum Geometria. Ad hoc autem, ut eius Perimetri dimensio in promtu sit, ad *rectificationem* Arcuum Peripheriae circularis necessario est confugiendum, quum et ipsa Curvae constructio ab isto pendeat Problemate. Ceterum huius Lineae antiquiorem considerationem tribuendam esse Apollonio Pergaeo, aut saltem de ea vetustiorem Tractatum scripsisse *Περὶ τῆ κοχλίε γράμματι*, auctor est Proclus in Lib^{i}. II^{i}. Capite XI°. *Commentariorum* in primum Euclidis (initium §^{i}. 61^{mi}.). Geminum Rhodium eandem Lineam haud parum illustravisse idem Proclus testatur l. c. et rursum Lib^{o}. III°. ad pag^{am}. 143^{tam}. editionis Venetae anni M.D.LX^{mi}. curante Francisco Barocio, qui Graecum Opus latine vertit, et Danieli Barbaro consecravit. Nova de ipsa Curva symptomata alibi protuli in Prolegomenis *Magnitudinum Exponentialium etc.* (pag^{a}. LXIV.), et in §§^{is}. 16to. ac 57mo. huiusce *Exercitationis*. Plura vero conlegi in Tractatu adhuc inedito, et sic inscripto *Dei Solidi Cocleari ed altre affini eleganze della Geometria delle Curve*. Wallisius Helicem ipsam consideravit geometrice in Opere, cui titulum fecit *Mechanica sive de Motu Tractatus Geometricus*, typis edito primum Oxoniae vertentibus annis M.DC.LXIX^{no}. LXX^{mo}., et rursum *e Theatro Sheldoniano* a pag^{a}. 570ma. usque ad 1064^{tam}. Voluminis I^{i}. eius *Operum* etc. anno M.DC.XCV^{to}., in Prop^{ne}. praesertim I^{a}. Capitis IX^{ni}. *De Cochlea* (p^{is}. 987. 88.).

(77) Unicum in Geometria recentiorum mihi constat exemplum (etsi minus notum, neque uti par esset commendatum) quadraturae Spatii curvilinei, cuius mensura a facili non dimanet arearum *aequipollentia* quemadmodum Lunulae Hippocratis aut Oenopidis Chii (vid. Dissertat. *sur Oenopidas de Chio par M. Heinius* a pag^{a}. 401ma. usque ad 425^{tam}. in Volumine *Berolinensis Academiae* pro anno M.DCC.XLVI°.), Parallelogrammatum mixtilineorum variae speciei etc. etc., et nihilominus consequatur a Synthesi finitorum, scilicet, nullis opibus impetratis ab indirecta seu negativa

gativa *Exhaustionum* methodo Archimedea, multo autem minus ab *Indivisibilibus*, aut a rationum *Limitibus*, usu *Infinite-parvorum*, aliisve ab Euclidis placito absonis arguendi modis in re mathematica. Exemplum illud suppeditat Philippi De La Hire doctissima Lucubratio de dimensione Superficiei Ungulae ac Sphaerae (*Nouvelle methode pour demontrer le rapport de la superficie de la Sphere avec la superficie de son plus grand Cercle, et avec la superficie du Cylindre qui a pour base le même Cercle, et pour hauteur le diametre de la Sphere; avec la quadrature de l'Ongle cylindrique & de la Figure des Sinus.*) in veteribus *Actis* Scientiarum Academiae Parisiensis relatis ad annum M.DC.XCII^um^. ab ea Ungularum polyhedrarum feliciter derivata, quae rursum exstat in Volumine X^mo^. *Collectionis* Hagae-Comitum in lucem editae. Quamvis enim methodus a Scriptore istius Lucubrationis adhibita eam imitetur iampridem publici iuris factam a Gregorio a Sancto Vincentio tam in Propositione XLVIII^a^. Partis III^iae^. Libri IX^i^. (pag^a^. 993.), quam in Propositione LXXVI^a^. Partis IV^tae^. eiusdem Libri (pag^a^. 1012.) *Operis* praecitati in *Adnotatione* 72da., nunquam tamen Theorema vidi elegantius, maiorique refertum ingenii acumine prae nuper recensita atque nova Ungulae Superficiei dimensione. Ipsi quoque procul dubio concedit simplicissima dimensio Ungulae, quam exposui in calce §^i^. 22^di^., etsi ab unico Euclide originem ducat ad fidem alterius §^i^. 65^ti^.

(78) *Actorum etc.* in Volumine anni M.DC.LXXXVI^ti^. legitur *Excerptum ex Litteris Domini D. T. Lipsiam missis* 20. *Feb.* 1686. ubi agit Epistolarum scriptor de cuiusdam Curvae *quadratura*, subiungitque = *Talis vero Curva mechanica a nullo quod sciam hactenus exhibita etc.* =.

(79) Guido Grandus in Praefatione ad Opusculum *de quadratura Circuli et Hyperbolae*, 2^dae^. editionis Pisanae anni M.DCC.X^mi^., pag^a^. XIII^a^. observavit nec novam esse istam Curvam, nec novam eius *quadraturam*, at Lineam esse eandem cum Ungula expansa, iamdudum ab Ioanne Wallisio, Iesuita Honorato Fabrio, ac Stephano De Angelis Iesuata (non male Montucla T. II. p^a^. 69. *De Angelis étoit de l'Ordre des Hieronymites*, quum Iesuatae Hieronymitae Fesulei a Carolo e Monte Granello fundati fuerint circa annum M.CCCC^um^., et Iesuatae Hieronymitae Venetiarum ab Ioanne Colombino instituti, quorum priores Augustini *regulam* amplexi sunt, alteri Hieronymi, utrique vero a Clemente IX°. suppressi labente anno M.DC.LXVIII°.) ad Ellipseos perimetrum et geometricum *tetragonismum* redacta. Consulantur l^i^. c^i^. in *Nota* 66ta. Iohannis Wallisii, qui Lineam illam adpellat *Ellipsin expansam*, Opella Fabrii, cui titulus *De Linea Sinuum et Cycloide* in lucem emissa Lugduni anno M.DC.LXIX°. ad calcem suae *Synopsis Geometricae* (pag^a^. 313.) typis excusae Antonii

tonii Molini, et Stephani de Angelis Tractatus duo *De Superficie Ungulae, et de Quartis Liliorum Parabolicorum, et Cycloidalium* editionis Venetae M.DC.LXI. Principi Leopoldo ab Etruria bonarum Artium patrono amplissimo consecrati. Meo autem iudicio non ipsamet est Tschirnhauseni Linea cum notissima Ungula expansa, sed potius ad eandem *speciem* classemve pertinens ex demonstratis, nimirum verae Ungulae *adfinis* Euleri sensu, atque tali arte deformata inter eosdem extremos, ut eandem Aream spatiumve claudat antiquioris Ungulae aut Lineae Sinuum. Verba Grandii sunt quae sequuntur. *An referam celeberrimum Tschyrnhausium in Actis Lypsiae 1686. pro nova Curva areae quadrabilis proposuisse eam, quae nihil aliud est, quam Ungula cylindrica expansa, dudum a Vallisio, Fabrio, et Stephano de Angelis considerata?*

(80) In Volumine II°. seu *Continuationis* I^{ma}. impressa vertente anno M.DCC.XXIII^{io}. lege Diatribam sic inscriptam (pag^{a}. 128va.) *Mensura Ungulae a Cylindro resciffae demonstrata etc.* Wallisii *Mechanicam* auctor citat, et singulariter Propositionem XVI^{am}. Capitis V^{ti}. Nec modo Ungulae *quadraturam* nescisse videtur, quin etiam nomina iamdiu pervulgata Lineae Sinuum et Sociae-Cycloidis. (§§. 8. 9. pag. 130. 31. ac 32.). Rectius subtiliusque in Volumine IV^{to}. aut *Continuationis* III^{ia}. typis excusa anno M.DCC.XXXIV°. Iohannes Baptista Clairautius Ungulas Conicas metitus est = *Maniere de toiser les Onglets des Cones* =.

(81) Soliditatis Ungulae demonstrandae ac breviter statuendae modus, quo nunc utar, familiaris est Geometriae-limitum cultoribus. Ipsum fortasse primus ante anni lapsum M.DC.XLVII^{i}. Evangelista Torricellius adhibuit. Nam in MS. Palatino reperio luculentissimum illius methodi exemplum, quo ad pag^{am}. 61^{am}. idem Theorema et eâdem penitus demonstratione explicavit de Solidis quibuslibet regularibus, irregularibus, polyhedris, curvis, mixtis etc. etc. Sphaerae circumscriptis, a Francisco postmodum Zanotto evulgatum (pag^{a}. 362^{a}. et seqq.) in *Commentariorum Bononiensis Scientiarum et Artium Instituti atque Academiae* Volumine III°. in lucem edito labente anno M.DCC.LV°. *De Corporibus quibusdam Sphaerae circumscriptis* usque ad pag^{am}. 374^{tam}.

(82) Inter alia varii argumenti, quae continet Opusculum anecdoton, cuius sermo fuit in *Adnotatione* 53^{ia}., exstat manu Torricellii delineata Figura sequentis generationis Ellipseos Apollonianae per puncta. At praeter Figuram ne verbum quidem ab Auctore, nec Collectore exaratum occurrit.

(83) Propositio CLV^{ta}. Partis V^{tae}. Libri IV^{ti}. Voluminis I^{mi}. magni *Operis* Gregorii a Sancto Vincentio antea citati in *Adnotatione* 72da., et signanter ad pag^{am}. 326^{tam}. Lineam hoc modo descriptam Ellipsin conicam esse demonstrat, unico tamen casu

su rectarum aequalium EO et EI, FO et FI etc. Universalem demonstrationem ita in Fig^{a}. 76ta. concipiemt. Ex Curvae genesi, quomodocumque inclinetur CIM super BIA, est $DX = OT$, propter $DL = OI$, ideoque $TX = OD$. Ergo TX^2 ut OD^2, nimirum ut $BO . OA$, vel tandem per Elementa ut $CT . TM$, in qua proprietate Ellipsin conicam sitam esse norunt omnes $CNQMSP$ Diametros CIM, SIN coniugatas habentem.

(84) Partes enim NDX Ungulae *iacentis*, utpote aequales Triangulis IOT (Fig^{a}. 76^{a}.) proportionales sunt ad IO^2, dum e contra partes Ungulae *erectae* eodem modo computatae proportionem sequuntur $IB . IO$, sive $\tau\tilde{\varsigma}\, IO$. Crescunt igitur, decrescuntque *iacentis* Ungulae partes in *duplicata* ratione partium Ungulae *erectae*, et perquam faciliter ex praemissis Ungularum alterutra in *data* ratione secatur.

(85) Quibusdam in Schedis Astronomiam adtinentibus Annuli Saturnii phases varias (cuius Annuli rotationem divinum pene Wilhelmi Herschelii telescopium nuper detexit) huius Ellipseos descriptionis praesidio, et Figuris rite adpositis ac distributis summa facilitate ductus ad vivum olim depixi. At usus uberrimi speculationem istam geometricam praesertim expertus sum in Pontium Testudinumque, ovi-sectionis formam plus minusve in medio adsurgentem imitantium, concameratione apte breviterque signanda. Harumce Curvarum, quas veluti rei aedificatoriae et praxi architectonicae maxime idoneas Graeci Geometrae a voce καμαρα vel καμαροειδης nuncupaverunt *camaricas*, et peculiari eas Tractatu hodie deperdito Heronem, Commentariisque Isidorum Milesium mechanicum Eutocii Ascalonitae magistrum illustravisse enarrant, fusiorem habui sermonem in meo *Opere* typis parato *Memorie Fisico-Matematiche*, cuius memini in *Antelogio* ad pag^{am}. XIII. Adnotandum tantummodo aequalitatem paullo antea demonstratam arearum Ellipseos *scalenae*, et Circuli aut Ellipseos *aequilaterae* non valde absimilem esse ab argumento *Scholii*, quod exstat in pag^{is}. 18^{a}. ac 19na. aurei *Operis* sic inscripti *Francisci a Schooten Leydensis de Organica Conicarum Sectionum in plano descriptione* = *Lugduni Batavorum ex officina Elzeviriorum* M.DC.XLVI. =. (Vide insuper Propositionem C.LXXX^{mam}. (pag^{a}. 338.) Partis VI^{ta}. Libri IV^{ti}. Voluminis I^{mi}. *Operis* antea citati Gregorii a Sancto Vincentio).

(86) Geometrica Arcium constructio neminem latet Elementistam. In adlato exemplo proportio Chordae ad Sagittam (*freche*, *sesto*, *rigoglio*) Pontis ovalis est ἐν πλάτει veluti 95 : 18 in numeris integris. *Maximum*, de quo supra, constat ex Propositione XII^{ma}. ad pag^{am}. 61^{am}. Libri III^{ii}. Operis Vivianei *De Locis Solidis Aristaei senioris*.

(87) *Continuazione del Diporto Geometrico* = *Modi vari meccanici, lineari, e solidi tentati da V. V. per le costruzioni dei due illustri Problemi, il primo della divisione dell' angolo in data proporzione, il secondo dell' invenzione delle due Medie proporzionali*

nali = editionis Florentinae M.DC.LXXVI., quos modos latine versos rursum Auctor vulgavit anno insequenti (vide *Notam* 4^{tam}. *Antelogii*) hoc titulo inscriptos *Tentamenta varia ad anguli trisectionem*, cum adiuncta solutione per Circulum et Hyperbolen non absimili ab ea, cuius in MS. Torricellii = *Coniche varie piane e solide* = specimen vidi.

(88) Aliqui Apollonii Helicem aut Cochleam (*Adnot.* 76^{a}.) confundunt cum Archytae Tarentini Linea super Cylindrum descripta, de qua in percelebri Eratosthenis Epigrammate ad Ptolemaeum *Μὴ δὲ σύγ' ἀρχύτεω δυσμήχανα ἔργα κυλίνδρων* etc. Sed quam diversa a vera Helice Cylindrica sit, constat ex Eutocii Commentario in Librum II^{um}. Archimedis *de Sphaera et Cylindro* ubi legitur *Modus Archytae quemadmodum tradit Eudemus*. Consuli quoque poterit Opusculum Vivianii in *Adnotatione* 87ma. praecitatum.

(89) Haec Linea Sinuum-versorum, Linea Sinuum, Linea Cosinuum, Linea Sociacycloidis sunt una eademque Curva *transcendens* (*Nota* 75^{a}.). Flexuosa igitur Perimeter *BLASC* (Fig^{a}. 77^{a}.) huiusce Curvae et in toto et in partibus Perimetrum Ellipseos conicae adaequat, quemadmodum de *IAS* superius vidimus in §°. 15to.; ac si Socia eadem Cycloidis *contracta*, *protractave* fuerit, nihilo tamen minus eius Perimetri dimensio consequitur ab Ellipsi, non secus atque illa Cycloidum *contractarum* et *protractarum*. Puncta *flexus* *I*, *S* bifariam secant Chordas *AB*, *AC*, et ideo respondent Ordinatae *IS* Axem *AO* in *D* bifariam secanti. Portio Areae geometrice *quadrabilis* $IAS = 2AD^2$ eidem puncto Axis medio *D* respondet, veluti Hugeniana Cycloidis *primariae* pars exactae *quadraturae* capax Ordinatae per punctum *T* medium τῆ *AD* transeunti refertur ex iamdiu notis. Segmenta *AI*, *IB*, aeque ac *AS*, *SC*, et in toto et in partibus, circa puncta *flexus* *I*, *S* inverse disposita, sunt *similia* et aequalia per Curvae genesin a Cylindro. Integra itaque Area *BIASC* semis est Rectanguli circumscripti *BPQC* (quod et de medietatibus valet *BIAO*, *BPAO*), unde oritur Area ipsa dupla Circuli genitoris *AGOX*, et idcirco Area Cycloidis *primariae* *BKARC* eiusdem Baseos et Axis cum Socia sua ad Aream Sociae in *sesquialtera* est proportione. Gibba ergo Segmenta *AKBI*, *ARCS* Semicirculi genitoris Aream *AGOD*, vel *AXOD* peraequant, scilicet, paria sunt mixtilineis Triangulis Cycloidalibus *APBK*, *AQCR*; quod eodem redit ac dicere Spatia gibba triangularia *AIBP*, *ASCQ* Sociae-cycloidis ab Hemicycloide *AKB*, *ARC* secari bifariam, quemadmodum Triangula in avium rostri formam composita *AKBOG*, *ARCOX* a Perimetro *flexuosa* *AIB*, *ASC* Lineae Sinuum. Rectangula igitur *APBO*, *AQCO* in quatuor aequales partes dividuntur ab Hemicycloide *AKB*, eius Socia *AIB*, et Semiperipheria utrarumque genitoris Circuli *AGO*, vel ex adverso *ARC*, *ASC*, *AXO*. Tangentes *Sociae* tam in vertice *A*, quam in extremis *B*, *C*, perpendiculares sunt Axi *AO*, atque in *flexibus* *I*, *S* ita positae,

ut

ut ad Basim Axemque angulo semirecto inclinentur, atque ideo simul occurrentes angulum rectum efficiant, parallelis existentibus quo ad Chordas Quadrantum AG, AX, aut quo ad alteras OG, OX perpendicularibus. Tangens autem in puncto quocumque V perpendicularis semper est rectae EN ita ductae in Circulo genitore, ut $DN = AZ$ abscissae puncto *dato* V respondenti. Exinde fit quod si puncta V, F in concava, et convexa Curvae parte adeo sita sint, ut ordinatae VZ, FY a vertice ac basi aeque distent, gaudeant Tangentibus parallelis. Cuncta haec, una cum aliis ne fusior fieret iste Commentariolus omissis, antecxri Saeculi Geometras adlaborantes valde detinuerunt, dum heic ab inspecta tantum Cylindri *recti* sectione illico oriuntur. Pitotus ipse tripliciter in Actis Academiae Parisiensis anni M.DCC.XXIV^{i}. Sociae-cycloidis, Ungulaeque *quadraturam* in planum expansae ostendere aggressus fuit, suborta Academicos inter excellentissimos dubitatione, quae Ungulam ipsam cum Apollonii Helice commiscebat.

(90) Consulatur Propositio LIII^{ia}. ad pag^{am}. 996^{am}. *Operis* herculei in *Adnotatione* 73da. fusius citati. Exinde patet Rectangulum $IHMS$ circumscriptum Ungulae expansae IAS (Fig^{a}. 77ma.) esse ad Aream ipsius Ungulae vel supremae partis, versus Axem concavae, Sociae-cycloidis, aut Lineae Sinuum, ut $AG : AD$, vel Semicircumferentia ad Diametrum Circuli. Eadem valet proportio inter Rectangulum circumscriptum $AHIL$ (Fig^{a}. 16ta.) Lineae Tschirnhauseni in §°. isto explicatae, Areamque $ACIH$ ipsius Lineae clausam perimetro. Quae Linea, ut apte generetur, a Quadratrice Dinostrati ac Nicomedis pendet, cuius nomen penes Graecos τετραγωνίζουσα, non secus atque de Apollonii Helices ac Quadratricis ipsius foedere et harmonia docuit Pappus Alexandrinus in *Collectionum Mathematicarum* Libri IV^{i}. Propositione XXVIII^{va}.

(91) Ab hoc etiam *intuitivo* Theoremate dimensio consequitur facilis Superficiei Coni *recti*, illâque profacto simplicior alias deducta in *Adnotatione* 58va.

(92) Hyperbola Apolloniana oritur a recta Linea semel atque proportio *directa* ordinatarum abscissarumque postremae in *inversam* vertatur. Huius conceptus ad demonstrandas faciliter sublimiores Hyperbolae proprietates summopere idonei prima inveni vestigia in MS. Torricellii ad pag^{am}. 59^{am}. et universalius ad 37^{mam}.; atque hoc idem postmodum adnotavit Newtonus in §°. 9°. Num^{i}. IV^{ti}. *Enumerationis Linearum tertii ordinis*, ubi de variis agit *Hyperbolismis*, quos inter sic loquitur *Hac ratione Linea recta vertitur in Hyperbolam etc.* (Vide quoque *Adnotationem* 188^{vam}.).

(93) Antiquum erat Theorema Cylindrorum *rectorum* exceptis Basibus *isoperimetrorum*, sed simile nunquam vidi de Cylindris *scaleni* expositum. Torricellius primum noverat, alterumque elegantissimum, at ab argumento, in quo sumus, alie-

num,

num, Cylindrorum scilicet Hyperbolae quadraticae, quam *spuriam* dixit, aequalium.

(94) Vide 1um. c^{um}. Epistolae ad Hugenium in *Propositione* sic nuncupata.

(95) Eâdem methodo incedit res pro puncto quolibet interiori, quod brevitatis caussa (vid^{ur}. $\S^{i}$. finis) praetermittendum existimo.

(96) Nam RT, quum parallela ad DH esse debeat ex constructione, et DH normalis sit ad diametrum βG propter $C\Psi : \Psi\beta : \Psi H \div$ ex proprietatibus sectionis harmonicae, aot $C\Psi : \Psi D : \Psi H \div$, et angulum rectum $CD\Psi$ in puncto contactus, non potest quin super CT perpendicolariter aeque insistat.

(97) In toties citata Galilaei doctrina (*Adnot.* 31ma. et alibi) hoc equidem admirandum occurrit, quod non solum Circuli Circomferentia $\beta D\sigma G$ sit *Locus* rectarum rationem constantem habentium $C\beta : \beta H$, verum etiam inverse Circulus alter $CKHVI$ sit pariter *Locus* rectarum rationem constantem servantium $GH : H3$, ita ut duobus simul Circulis, geminoque Problemati semper inserviat eadem constroctio.

(98) Huc redit constructio Problematis Galilaei etc. (*Nota* antec.) simpliciori modo resoluti quam in *Dialogis* etc. Philosophi illius celeberrimi. (Vide *Adnotationem* 31^{am}.).

(99) L°. c°. Tractatus sui *de Indivisibilibus*. Erratam autem saepius corrige Auctoris aut preli vitio Figuram.

(100) Totam Cylindri *scaleni* Superficiem (non Hemicylindri) postmodum in *Conclusione* Robervallius considerat, eoquod totam Aream dimetiri studeat clausam a ductu circini sui, vel a Linea Cycloc.ylindrica. (Consulatur $\S^{us}$. 15us. ac praesertim inspectis rursus Fig^{is}. 15ta. et 25ta).

(101) Perlege ac confer 1um. c^{um}. in *Adnotatione* 94ta.

(102) Duo igitur Circuli concentrici eâdem proprietate gaudent constantis Rectanguli segmentorum cuiuslibet Rectae utramque secantis Peripheriam, qoemadmodum Hyperbola conica inter Asymptotas. Hoc est equidem *elementare*, congruitque cum 3^{ia}. Propositione Libri II^{di}. (pag^{is}. 31. 32.) Fermatii Operis inferius citandi in *Nota* 105ta.; veruntamen isto innititur fundamento maxima Problematum pars, quae antiquorum Analysi resolvuntur, Curvarumqoe genesis innumerarom nativa atque facilis a Curva *data* (§. 54.).

(103) Nihil unquam suavius in meorom studiorum curriculo expertus sum ad magni aestimandos Analyseos veterum usus lectione *Operis* egregii, cuius titulus *Remarks upon M. Euler's Treatise of Motion* a Beniamino Robins in lucem editi anno M.DCC.XXXIX°., necnon Appendicis *Librorum quinque Sectionum Conicarum* Roberti Simson, Matheseos in Glasguensi Academia Professoris, Edinburgi denuo impressorum

pressorum vertente anno M.DCC.L^mo., ipsiusque Scriptoris (qui fato cessit plusquam octuagenarius anno M.DCC.LXVIII°.) *Collectionis* postumae Glasguae excusae anno M.DCC.LXXVI°. sub titulo *Roberti Simson Opera quaedam reliqua*.

(104) Galilaei Problematis toties praecitati fons est hic primigenius, et caput huiusce utillimae in re geometrica et analytica speculationis. Doctrina etenim Galilaei casum unicum statuit et singularem τῷ $CI = o$ istius universalioris Problematis. Ceterum de antiquorum in quaestionibus Geometriae resolvendis dexteritate atque elegantia audiatur Fermatius, qui id testante Wallisio (*Operum Mathematicorum* T. II. ad pag^am. 859^am.) ita rescripsit . . . . . *ut sepositis tantisper speciebus Analyseos, Problemata geometrica via Euclideana et Apolloniana exsequantur, ne pereat paulatim elegantia et construendi et demonstrandi, cui praecipue operam dedisse veteres innuunt satis et Data Euclidis, et alii a Pappo enumerati Analyseos Libri*.

(105) Istud Problema Pappus recensuit in Praefatione ad VII^um. Librum *Collectionum* etc., ad pag^am. 163^tiam. editionis praecitatae anni M.DC.II^i., hisce verbis transcriptis e *Locis Planis* Apollonii Pergaei (p^a. 162da.). *Si a duobus punctis datis rectae lineae inflectantur, et sit quod ab una efficitur eo, quod ab altera dato maius quam in proportione, punctum positione datam Circumferentiam continget*. In Volumine eximio ita inscripto *Varia Opera Mathematica D. Petri de Fermat Senatoris Tolosani* edito Tolosae vertente anno M.DC.LXXIX°. (*Adnotatio* 31ma.) exstant inter cetera *Apollonii Pergaei Libri duo de Locis Planis restituti*, ubi ad pag^as. 32. ac 33. construitur facile demonstraturque praecedens Problema. Quinimo resolvitur etiam analogum a Pappo omissum „ *Si a duobus punctis datis rectae lineae inflectantur, et sit quod ab una efficitur eo, quod ab altera dato minus quam in proportione, punctum positione datam Circumferentiam continget* „ quod Apollonius fortasse una cum primo solutum dederat. Hanc 4^am. Fermatii propositionem Libri II^di. Montucla indicavit num°. 3^io. *Ce sera encore etc.* Notae (b) ad pag^am. 264^am. Voluminis I^i., correcta tamen Schematis 27^mi. numeratione, quum sit 26. Dum autem Problema sic enunciatum fuisset „ Dato Circulo *OOOO*, cuius centrum *I* (Fig^a. 78va.), datisque in *AI* punctis *A*, *S*; invenire *Locum* geometricum, in quo sita sint puncta innumera *S*, *S*, *S*, *S* etc. huiuscemodi legem servantia, ut *AS* ad *SO* tangentem Circuli dati sit semper in data ratione „ quaenam resolutionis difficultas, quotnam Calculi ambages experiendae statim oculis obversarentur? Nihilo tamen minus est idem praefatum Apollonii Problema, et in Galilaeanum vertitur, sui limitem, casumque facillimum, semel atque Circulus ille evanuerit, aut magis magisque diminutus in centrum *I* tandem desierit.

(106) Infinitophili arguerent heic subtiliter esse ac mysteriose $BC : o :: o : o$, sive $\infty : 1 :: o : o$, a quibus tamen castas Geometrarum aures offendentibus miraculis semper sem-

 perque

perque abstinebo. Plerumque enim contingit acutissimi ingenii viros Infiniti praestigia animi aestu correptos quodammodo effingere, iisque summopere delectari, adeo ut effatum illud Sallustii saepius recurrat *Vastus animus immoderata, incredibilia, nimis alta semper cupiebat*. (Legenda est non sine fructu Dissertatio *De l'Infini absolu considerè dans la grandeur* (a pag^a. 1^a. ad 46^tam. 3^iae. numerationis in T°. II^do. *Miscellaneorum* Taurinensium) *par le Pere Gerdil Barnabite* hodienum Hyacintho Gerdilo S. R. E. Cardinali).-Mathematicus quidam ludum olim ingeniosum proposuerat, quo demonstrare pollicebatur unam eandemque fore Curvam Parabolam, et Hyperbolen Apollonii. Alia inter ratiocinium istud instituebat. In Parabola *CID* (Fig^a. 79na.) sunt Ordinatae *IO*, *IO* uti Rectangula segmentorum *CO*.*OD*, *CO*.*OD* ex Conicarum doctrina. In Hyperbola *CID*, euius Asymptotae fuerint *AT*, *ASM*, et Ordinatae *IO*, *IO* uni Asymptotarum *ASM* parallelae, ideoque *OL*, *OL* magnitudinis infinitae, ob proprietatem universalem Sectionum-conisunt *IO*.*OL*, *IO*.*OL* veluti *CO*.*OD*, *CO*.*OD*, et idcirco *IO*, *IO* in proportione *CO*.*OD*, *CO*.*OD* quemadmodum Parabolam adtinet. Ergo etc. Nodus solvitur statim ac suppositam aequalitatem infinitarum longitudinum *OL*, *OL* male suppositam moneamus. Nam *OL*, *OL* proportionales sunt ex adverso rectis *IB*, *IB* alteri Asymptotae *AT* aequidistantibus (vel quibuslibet invicem parallelis usque ad ipsam Asymptotam), adeo ut $CO.OD : CO.OD :: IO.IB : IO.IB$, secus atque in Parabola. E contra in Apollonii Parabola Diametrorum portiones *OL*, *OL* etc. infinite-longae in ratione sunt aequalitatis, quum in hac sint proportione respondentium Parametrorum longitudines infinitae, quae Diametrorum *limites* adtinerent sese cum Ordinatis suis confundentium.

(107) Si *ABC* Conus *rectus* fuerit, et ideo ex praemissis *AK* parallela et aequalis *BC*, uti etiam *AY*, duae Ellipses cum Basi Circulari *BECD* congruent eiusdem Coni, unde profluit dimensio Conicae Superficiei quemadmodum in Elementis passim habetur.

(108) Nam per *X* ducta *aXb* parallela *BC*, erit ex proprietatibus reetarum *AB*, *AC* elementaribus $LX.XV : bX.Xa :: AF'^2 : BF.FC$, nimirum ex Problematis constructione $AF'^2 : CF'.F'B = HX.X\Theta : bX.Xa$, unde oritur $LX.XV = HX.X\Theta$; quod propter aequales VL, $H\Theta$ in Triangulo contingere nequit, nisi fuerint $LX = X\Theta$, $VX = HX$, et parallelae VH, $L\Theta$ ob triangula HXV, $LX\Theta$ ad verticem opposita ac aequierura.

(109) Dum Conus fuerit *rectus* tota Figura evidentissime in Circulares vertitur Circumferentias *concentricas*, quarum Centrum *A*, nullaque Latera eas tangere possunt, nisi aliter Coni vertex in Infinitum recedat. Angulum $AIO = AMN = ANM$ Laterum tangentium (de quo paulo superius), quem efficiunt cum Chorda *MN* etc. definivi. Quem autem efficiunt eum Axe *AE*, Sinum habet $\frac{CB}{AB + AC}$, cuius Anguli duplus est *MAN*, a Lateribus tangentibus simul efformatus. Circumferentiae ita a Late-

a Lateribus tangentibus dividuntur, ut $MD : ME :: MDN : MEN :: 180° - MAN : 180° + MAN$ etc. etc.

(110) Constructio haec est simplicissima in puncta invenienda Q', R' contactuum Ellipseos *datae*, Laterumque AM, AN Anguli *dati*. Fiat $XM : XZ$ veluti Axis coniugatus ad transversum Ellipseos. Ducatur AZ, et ei normalis XY, in qua secta sit $X\Delta =$ *dato* Semiaxi transverso. A puncto Δ emittatur $\Delta\Lambda$ parallela ad XA usque ad occursum cum AZ. Demum a puncto Λ discedat $\Lambda Q'CR'$ perpendicularis ad AX, eruntque Q', R' contactus quaesiti. Omnia pendent a Tangentium proprietatibus Circuli atque Ellipseos inscriptae.

(111) Ita dictum in §. 7[mo].

(112) Constat hoc ex eodem §. 7[mo]., et ex §. 15[to]. Edmundus Halleyus in *Transactionibus philosophicis* (N°. 203.) Societatis Regiae Londinensis Mense Septembri recensitis Anni M.DC.XCIII[ii]., dum calorem Solis metiretur (*The proportional Heat of the Sun in all Latitudes*), peringeniosam et novam dimensionem Superficiei Ungulae Cylindricae protulit, eiusque partium. Ars omnis innititur fundamento geometrico quod Planum Ungulam in Cylindro efficiens, Sphaeramque simul secans inscriptam, horum Corporum Superficies transversim sectas ita determinet, ut prima ad secundam sit in Ratione Tangentis ad Arcum Circuli sui, nimirum ut altitudo Ungulae in diametrum Sphaerae, aut Baseos Cylindri, ad respondentem Arcum Circuli maximi in eandem diametrum, sive ad Sphaericae superficiei sectam angularem portionem; ex quo consequitur Ungulae Superficies aequalis Rectangulo altitudinis suae in diametrum Baseos. Principii huiuscemodi demonstratio etsi facillima fuerit, concedit tamen simplicitati, qua paullo post utar in *Quadraturam* ipsius Ungulae rursum sistendam. Quae etiam *Quadratura* illico prodit a Functione *transcendente* $\int d\varphi \sqrt{1 - e^2 Cos^2. \varphi}$ Arcum Ellipticum ex inventis Le Gendre significante (*Nota* 148.). Nam evadente 1 *excentricitate* e, abit in $\int d\varphi . Sin. \varphi = 1 - Cos. \varphi$ (non $- Cos. \varphi$, ut in Tabula Capitis V[ti]. et Problemate 25[to]. ad pag[am]. 151[am]. et seqq. Sectionis I[ae]. Partis I[ae]. *Institutionum Calculi Integralis* habet Eulerus).

(113) Volumen XVIII[um]. pro anno M.DCC.LXXIII[io]. in lucem editum Petropoli vertente anno M.DCC.LXXIV[to]. In eo exstat *Dissertatio* pag[a]. 71[a]. et seqq., cui doctissimus Auctor titulum fecit *Nova Series infinita maxime convergens perimetrum Ellipsis exprimens*. Vide huius *Exercitationis* §[um]. 44[tum]. in calce. Alembertus etiam nonnulla prodidit ad hanc ipsam Spartam ornandam in Parte I[ma]. Voluminis V[ti]. *Opusculorum Mathematicorum*, et signanter in fine §[i]. IV[i]. *Memoriae* XXXVI[tae]. ad pag[as]. 246[tam]. atque 247[mam]. de rectificanda perimetro Ellipseos, sed valde *oblongatae* ac magna *excentricitate* praeditae, et idcirco prope verticem *primum* Sectio II[da].

mum cum Parabola fetme, vel maxime *oblonga* Hyperbola congruentis. Nova quaedam et admiranda nupertime protulit Le Gendre in *Memorabilibus* Scientiarum Academiae Parisiensis pro anno M.DCC.LXXXVI°., editis tamen anno M.DCC.LXXXVIII^{vo}. Duo inibi exstant *Dissertationes* cl. Auctoris, nimirum *Mémoire sur les Integrations par Arcs d'Ellipse* a pag^{a}. 616ta. usque ad 644^{tam}., et *Second Mémoire sur les Integrations par Arcs d'Ellipse. Et sur la comparaison de ces Arcs* a pag^{a}. 644ta. usque ad 684^{tam}. Legantur praesertim §^{us}. II^{us}. *Dissertationis* I^{ae}. (pag^{a}. 618.) et §^{us}. III^{ius}. (pag^{a}. 620.), quibus Series-infinitae perhibentur pro Arcubus dimetiendis Ellipsium haud valde *excentricarum*, Arcusque mensurantur valde *excentricarum* Ellipsium ope notissimi Theorematis Comitis Iulii Fagnani. Ceterum quomodo condi possent *Tabulae* inferius memoratae Arcuum Ellipticorum in Calculi Integralis commodum perinsigne liquido constat ex praecitatis *Dissertationibus*, praesidio etiam impetrato a Theorematum celeberrimorum copia, quorum mentio alibi occurret.

(114) Consulantur prae ceteris Caput VI^{um}. ad pag^{as}. 343^{iam}. 529^{nam}. et 536^{tam}., ac *Tabula* pag^{ae}. 564^{tae}. mei Operis *Magnitudinum Exponentialium etc.*, ac signanter quo loci disserui de nova Hyperbolae *quadratura* ab ea Circuli derivata, et de Circulari atque Hyperbolica Trigonometria. Quinimo cuncta Integralia, quae ab Hyperbolae conicae Arcubus pendeant, nec novum *transcendentium* quantitatum genus, nec novam parere difficultatem ostenderunt Eulerus in Volumine VII°. *Novorum Commentariorum Academiae Petropolitanae*, Ioannes Landenius in *Transactionibus Londinensibus* anni M.DCC.LXXV^{ti}. (N°. XXVI°. Partis II^{lae}. a pag^{a}. 283. ad 290. *An investigation of a general Theorem for finding the lenghs of any Arcs of Conic Hyperbola by means of two Elliptic Arcs, with some other new aud useful Theorems deduced therefrom*) ac fusius in *Opere* edito sub annum M.DCC.LXXX^{uni}. et sic inscripto (*Mathematical Memoirs respecting a variety of subjects*), atque omnium nuperrime Le Gendre in I°. c°., praesertim §°. V°. et pag^{i}. 634^{ti}. I^{ae}. *Dissertationis* (*Rectification de l' Hyperbole par l'Ellipse*). *Tabulae* idcirco, de quibus locutus sum in antecessum, si pro Arcubus tantummodo Ellipticis conderentur, usui etiam essent pro Hyperbolicis inveniendis. Methodus facillima traditur a cl. Le Gendre, innititurque Calculo *differentiarum partialium*. Exoriare igitur aliquis Geometrarum, qui Analyseos amore percitus Trigonometricis iamdudum conditis et Logarithmicis *Tabulis* illas adiiciat totam hanc complectentes Magnitudinum *transcendentium* familiam.

(115) *Harmonia Mensurarum etc.* (*Transact. Phil.* T. XXXII. N°. 372. §. VIII. pag^{a}. 139.). *Traité des Fluxions par M. Colin Maclaurin etc.* editionis Parisiensis anni M.DCC.XLIX^{i}. (vide *Notam* 19.) Volumen II^{um}. Liber II^{us}. Caput III^{ium}. pag^{a}. 192^{a}.

192ª. ac §°. 758ᵛᵒ. et seqq. Huius tamen Hyperbolarum Ellipsiumque *harmoniae* summum apicem tetigit Le Gendre, qui duo *transcendentium Functionum* species in unam eandemque coniunxit. (*Notae* 113. et 114.).

(116) Isthuc ipsum absque Trianguli *differentialis* praesidio ostendi poterit cum Euclide ex posterius adsertis in §°. 65ᵗᵒ.

(117) *Traité du Calcul Intégral = par M. de Bougainville, le jeune = a Paris* M.DCC.LIV. in Partis Iᵐᵃᵉ. Capite XIVᵗᵒ. ad pagᵃᵐ. 201ᵃᵐ. et §ᵘᵐ. CCVᵘᵐ.

(118) Natura etenim et constructio Integralis iubent ipsum evanescere dum $x = a$. (Vide *Notam* quartamdecimam *Antelogii*). Nec locus est in hoc Integrali acutissimis exceptionibus ab Eulero deductis dum Prooemium scripsit Dissertationis, cui titulum fecit *Exposition de quelques Paradoxes dans le Calcul Integral* in Volumine *Commentariorum Beroliuensium* pro anno M.DCC.LVIᵗᵒ. ad pagᵃᵐ. 300ᵐᵃᵐ. atque sequentes. Dum ista de *completa* integratione ex vulgato Analyseos canone repeto in mentem venit amoenissimae enarrationis occasio. Eram iussu PRINCIPIS in Lacus cuiusdam viciniis Etruriae antiquae celeberrimi. Oportebat, si non vere, saltem proxime, depressionem ipsius Lacus metiri, eius aqua per cuniculum effluente. Cum Viro Mathematico rem simul agere conventio fuerat nec sine honoribus, nec sine fama. Torricellii lege ad facilitatem recepta, Socinrum quidam, ne praestantissimi ingenii sui periculo fraudaretur, illicò Calculum Tabulamque ita disposuit, ut quamvis nocte dieque *Cursum* Wolfii pervolutasset, *constantis* addendae haudquaquam meminerit. Monstrum exinde natum arithmetico-hydraulicum. *Constantis* omissae amicum ipsum Geometram monui, et monui citissimo, ne forte risus aut Plautini sales Congressus dignitati, speratoque eventui quidpiam detraherent. Heu! quam miserrima humanarum est rerum omnium vicissitudo!

(119) Ex adverso namque legitimam illam ac veram Formularum matrem aut raro invenies in Analyseos Infinitorum Elementis Tractatibusve, aut semel atque inveneris, remotissimis *derivatis* ab alia Formula adnumeratam reperies, et adeo confusam, ut matris honore penitus orbata sit. Ex. gr. Alembertus in *Memoria* VIIᵐᵃ. Voluminis Iᴵ. *Opusculorum Mathematicorum* ad §§ᵒˢ. Vᵘᵐ. ac VIᵗᵘᵐ. et pagᵃˢ. 239ᵃᵐ. 240ᵐᵃᵐ. Formulam tractans *differentialem* $\frac{-dz\sqrt{b^2a^2+e^2a^2-2ee^2z}}{\sqrt{a^2-z^2}}$ non modo eam veluti omnium *differentialium*, quarum integratio dependeat ab arcubus Sectionum-coni, genitricem et caput esse haudquaquam cognovit, verum etiam ad illam integrandam ope Ellipseos necesse habuit, ut reduceret substitutionis praesidio ad alteram Formulam *derivatam*, perturbata atque inversa harumce expressionum genealogia, $\frac{-ds\sqrt{2ce^2}\cdot\sqrt{s}}{\sqrt{(a^2-M^2)+2Ms-s^2}}$, in qua $M > a$ aut τὸ $(a^2 - M^2)$

negati-

negativum, scilicet $a^2 \frac{(b^2+c^2)}{2cc^2} > a$, quod ex comparatione meae Formulae *primigeniae* statim adparet, quia $\frac{a^2+c^2}{2c} > a$, sive $(a-c)^2$ aut $(c-a)^2 > 0$. (Vide quoque finem §[i]. 54[ti].). Istud Alemberti, Mathematicorum huius saeculi facile principis, exemplum luculentissimum ad Algebrae ordinem et claritatem melioribus inposterum auspiciis servandam Geometras omnes excitatum iri confido.

(120) Consulatur Dissertatio praecitata in *Adnotatione* 113[ia]. ad §. 3[ium]. sub finem.

(121) Eulerus enim in eodem §°. 3[io]. ad pag[am]. 72[dam]. hac utitur substitutione $\frac{x^2}{a^2} = \frac{1+z}{2}$ vel $x^2 = \frac{a^2}{2}(1+z)$.

(122) Nam Eulerus in §°. 2[do]. ad pag[am]. 71[am]. l[i]. c[i]. numerat abscissam x ab Ellipseos centro, ideoque dx et dz positivi sunt Elliptico Arcu crescente, dum ex adverso in mea methodo abscissa x (aut OC in Fig[a]. 31.) a contraria Ellipseos centri parte desumitur, crescit decrescente Arcu Elliptico, atque vicissim. Ut igitur utraeque hypotheses consonent, τὸ dx aut dz positivum in una fit negativum in altera.

(123) Volumen II[um]. Academiae Petropolitanae praecitatum in *Adnotatione* 38[va]., editum anno M.DCC.LI[mo]., in Disquisitione, cui titulus est adpositus *De reductione Linearum curvarum ad Arcus circulares*, ad annum M.DCC.XLIX[um]. relata, dum altera respondens anno M.DCC.LXXIII[io]. in lucem prodiit vertente M.DCC.LXXIV[to]. Temporis igitur intervallum vigintiquatuor annos completos et amplius (scilicet vigintiquinque in adsueto computandi modo) complectitur. Quam igitur Eulerus Formulam posteriorem invenit elementi Arcus Ellipseos, eam ipsam a primo eius tentamine in demonstrationem consequendam doctrinae Bernoullianae adeptus aeque fuisset. (Vide §§[os]. 9[um]. ac 10[um]. intimo foedere nexos).

(124) *Histoire de l'Académie Royale des Sciences etc. de Berlin* in Tomo pro anno M.DCC.XLVI°., typis excuso sub anni lapsum M.DCC.XLVIII[vi]., cuius meminit *Adnotatio* 20[ma]., ubi exstant *Recherches sur le Calcul Integral par M[r]. D'Alembert = Seconde Partie = Des Differentielles qui se rapportent à la rectification de l'Ellipse ou de l'Hyperbole*. Perlegantur praesertim pag[ae]. 200[ma]. ac 201[ma].

(125) Bougainvillius in *Tractatus* praecitati (*Nota* 117[ma].) Parte I[ma]. ad pag[as]. 198. 199., Riccatus in *Institutionum* etc. superius memoratarum (*Nota* 21[ma].) Volumine II[do]. et signanter Capite XIII[io]. Libri I[i]. ad pag[am]. 207. et seqq., Cousinus (cuius

laudes

laudes ab Alemberto ipso celebrantur in Praefatione *Avertissement* ad Volumen I[um]. *Opusculorum Mathematicorum* pag[a]. XIII[a].) in *Lectionibus* suis ita inscriptis *Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral = a Paris*, M.DCC.LXXVII.= ad Partem II[dam]. pag[amque]. 456[tam]. et seqq. Quibus omnibus addantur, si placeat, *Elemens du Calcul Integral, Premiere Partie, par les PP. Le Seur et Jacquier, a Parme* M.DCC.LXVIII. in Capite VII[mo]., quod a pag[a]. incipit 448[va].

(126) De inventorum horumce epochis Maclaurini et Alemberti loquuntur *Adnotatio* 19[na]., initium §[i]. 42[di]., aliaeque *Adnotationes* 20[ma]. et 124[ta]. Methodus autem, quam sequitur Maclaurinus, perlegenda est l°. c°. in eadem *Adnotatione* 19[na].

(127) Hoc Integrale $\int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{x^4-1}}$ tribuit Maclaurinus in §°. 799[no]. ad pag[as]. 225[tam]. et 226[tam]. Substitutiones autem praedictae occurrunt praesertim in §§[is]. 804[to]. et 805[to]. ad pag[as]. 229[nam]. ac 230[mam].

(128) Ab Aequatione consimili secundi gradus Ellipseos utriusque Semiaxes deducunt Analystae etiam omnes praefati (Boogainvillius l°. c°. ad §[um]. CCII[dum]. et pag[as]. 199. 200.). Qui primus autem Ellipses geminas *similes* eidem Problemati resolvendo idoneas detexit, fuit Alembertus in §°. XVI°. ad pag[am]; 202[am]. *Actorum*, de quibus supra, Berolinensis Scientiarum, Literarumque humaniorum Academiae. De binis iisdem Ellipsibus conicis in *Functionum differentialium* integratione consulatur acutissimi Leonardi Euleri doctrina ad pag[as]. 10. 11. 12. 21. 22. 34. Voluminis X[mi]. *Novorum Commentariorum Imperialis Academiae Petropolitanae*.

(129) Quadratum enim τῶ $A + B\sqrt{-1}$, sive τῶ $m(\mathit{Cos}.\,\phi + \sqrt{-1}\,.\,\mathit{Sin}.\,\phi) = m^2(\mathit{Cos}.\,2\phi + \sqrt{-1}\,.\,\mathit{Sin}.\,2\phi)$ nunquam reale esse potest, si *casum* $B = 0$ hic non contemplandum exceperis. Consulantur ea, quae de Formula universali $(z + y\sqrt{-1})^x = (z^2 + y^2)^{\frac{x}{2}}(\mathit{Cos}.\,x\phi + \sqrt{-1}\,.\,\mathit{Sin}.\,x\phi)$ facto ϕ Arcu vel Angulo, cuius Tangens sit $\frac{y}{z}$, demonstravi in Capite V[to]. et pag[a]. 318[va]. Operis *Magnitudinum Exponentialium*. Ceterum $\frac{(c+a)^2}{2c} = \frac{c^2 - b^2 + 2bc\sqrt{-1}}{2c} = \left(\frac{c^2 - b^2}{2c}\right) + b\sqrt{-1}$ in casu $a = b\sqrt{-1}$ ex communibus etiam Algebrae regulis constat.

(130) Praecipue perlege Bougainvillium in §°. CCIII[io]. pag[a]. 200[ma]. l. c.

(131) Correxi Typothetae errorem paullo superius commissum *in punctis A, H* etc., ac rectius manuscripsi *in punctis A, F* etc., quemadmodum etiam alibi laborem hunc improbum sustuli. *Limites* definiti *variabilis* z praesidio descripti Circuli perfecte congruunt cum illis a Bougainvillio traditis sine Circulo in Num°. CCIV°. Partis I[ae]. etc. ad pag[as]. 200[mam]. et 201[mam].

(132) Vide prae ceteris Bougainvillium Num°. CCI°., Cousinum 1°. c°. in *Adnotatione* 125[ta]., et si velis *Institutiones* etc. Riccati et Saladini, *Elementa* etc. Le Seur et Jacquierii in antea memoratis Capitibus.

(133) Bougainvillius erravit in pag[a]. 199[na]. l[I]. c[i]., qua scripsit *Par la propriété connue de l'ellipse on aura* 2pa *égal au quarré du demi-axe conjugué*. Nam 2pa quadratum peraequat integri *coniugati* Axis Ellipseos. Idem renovatur error ubi ait *le quarré du même demi-axe conjugué sera* 4qaa.

(134) Haec Figura quo ad Semiellipsin iisdem literis transcripta est a Schemate 6[to]. Partis I[ae]. praedicti *Operis* Bougainvillii, quod Schema fundamentum statuit universae huiusce doctrinae ab eo traditae ex Alemberto in I[ae]. Partis *Tractatus* sui de *Integrali Calculo* Capitibus XIV°. XV°. ac XVI[to].

(135) Systema Ellipseos atque Parabolae heic coniunctarum nullum secum adfert *imaginarium*. Ex adverso in Bougainvillio ad citatam pag[am]. 199[nam]. sic exponitur Aequatio Parabolae $aa + (q - 1)xx = az$ veluti supra nunciavi, scilicet, $xx = \frac{a}{q-1}(z - a)$, quae nisi apte inverteretur, ob $q < 1$, et idcirco Parametrum $\frac{a}{q-1}$ negativam, *imaginariam* Parabolam Apollonianam exprimeret. (Gabrielis Crameri *Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes algébriques* = M.DCC.L. = passim, sed praecipue ad pag[am]. 228[uam]. etc. Tab. X.).

(136) Semiaxis enim *transversus* est nunc ad *coniugatum* ut $1 + \sqrt{q} : q + \sqrt{q}$ ex demonstratis, vel ut $1 + \sqrt{q} : \sqrt{q}\,(1 + \sqrt{q})$, sive ut $1 : \sqrt{q}$, aut demum $a : a\sqrt{q}$, qui sunt Semiaxes *homologi* Ellipseos Bougainvillianae.

(137) Haec Parabola explicita est in Figura punctis adpositis literisque $\phi PIQ\psi$, et quo ad primam depictam *FDG* inversim iacet. Methodus eam describendi *per puncta* ope Circuli *dati* est omnium facillima (vide prae ceteris Grandum in Propositione I[a]. *Vivianeorum* ad pag[am]. 37[am]. et Vivianum in Propositione XXXIV[ta]. Partis III[iae]. Libri I[mi]. *De Locis Solidis etc.*). Nec silentio praetereundum censuerim geminos nostram Formulam construendi modos hic traditos ad Curvas semper *similes* perducere. Nam de duobus Ellipsibus idgenus *similitudinem* iam demonstravimus: duas autem Parabolas esse semper *similes* inter se Elementa conica statuunt. Suntque Parametri Parabolarum $\frac{a}{1-q}$, $a(1-q)$ in *duplicata* ratione τῶν $a, a(1-q)$ Semiaxium homologorum Ellipsium.

(138) Ut aliquomodo iudicium feratur de hac Analytica proprietate, quoad Algebrae vires sinant hactenus imperfectae, molimentum quiddam proponam ceteris in calce huius §[i]. non absimilibus animadversionibus adiiciendum. Infinite-parvorum Geome-

Geometria, et doctrina ipsa Pascalii (vide §§^{os}. 36. 37.) sistunt *elementum* Arcus Ellipseos conicae $\dfrac{dx\sqrt{a^2-x^2+\frac{p}{2a}\cdot x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Elementum itaque Arcus Ellipseos *imaginariae*, in qua vice a subeat $a\sqrt{-1}$ ad mentem contextus, erit

$$\frac{dx\sqrt{-a^2-x^2+\frac{p}{2a\sqrt{-1}}\cdot x^2}}{\sqrt{-a^2-x^2}}\text{, sive potius }\frac{dx\sqrt{-a^2-x^2-\frac{p\sqrt{-1}}{2a}\cdot x^2}}{\sqrt{-a^2-x^2}}\text{, aut}$$

$$\frac{dx\sqrt{-1}\cdot\sqrt{a^2+x^2+\frac{p\sqrt{-1}}{2a}\cdot x^2}}{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{dx\sqrt{(a^2+x^2)+\left(\frac{p}{2a}\cdot x^2\right)\sqrt{-1}}}{\sqrt{a^2+x^2}};$$

quod est *Binomium* classem illorum adtinens, quae una constent parte *reali*, altera *imaginaria*, aut ad hoc *Binomium*, dummodo vires suppeterent, intra finitorum *limites* reducendum. Hanc igitur expressionem $\displaystyle\int\frac{dx\sqrt{(a^2+x^2)+\left(\frac{p}{2a}\cdot x^2\right)\sqrt{-1}}}{\sqrt{a^2+x^2}}$ qui per $c+a\sqrt{-1}$ multiplicaverit, efficiet *Productum* $(c+a\sqrt{-1})\times$ $\left(\displaystyle\int\frac{dx\sqrt{(a^2+x^2)+\left(\frac{p}{2a}\cdot x^2\right)\sqrt{-1}}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$ ab eo non absimile neque in *Factorum* qualitate, neque in intimo eorum sensu, quod *reale* ostendimus per destructionem *imaginariorum* ad calcem §^{i}. 32^{di}. analytico omni rigore servato. *Imaginariorum* eliminatio affatim ab Algebra perhibetur. At exemplum elegantia atque admiratione nulli comparandum suppeditat Integrale $\displaystyle\int\frac{dz}{\sqrt{-Lz}}$ relatum ad $z=1$; quod Integrale Ioannes Albertus Eulerus ostendit $=\sqrt{\pi}$, sive Radici quadratae Circumferentiae Circuli, cuius Diameter 1. (*Sur le tems de la Chute d'un Corps attiré vers un centre des forces en raison reciproque des distances* ad pag^{am}. 250^{am}. et seqq. *Actorum Berolinensium* pro anno M.DCC.LX^{mo}.). Oblitus fuit autem inventionis ipsius, quam iamdudum ediderat in Tomo V^{to}. *Actorum veterum Petropolitanorum* pro annis M.DCC.XXX. ac XXXI. Leonardus pater eius, fuse loquutus de $\int dx(-Lx)^n$. De utriusque methodorum concordia alibi edisseram.

(139) Absque *substitutionis* praesidio isthuc ipsum *directe* etiam consequimur a Formula *primitivae* filia, superius in §^{o}. 27mo. et alibi animadversa,

Nn $a\sqrt{2c}$

$a\sqrt{2c}\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c}.z-z^2-\left(\frac{c^2-a^2}{2c}\right)^2}}$. Nam verso a in $a\sqrt{-1}$ fit

$$a.\sqrt{2c}.\sqrt{-1}\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{\frac{c^2-a^2}{c}.z-z^2-\left(\frac{c^2+a^2}{2c}\right)^2}}=$$

$$a\sqrt{2c}.\sqrt{-1}\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{-1}.\sqrt{-\left(\frac{c^2-a^2}{c}\right)z+z^2+\left(\frac{c^2+a^2}{2c}\right)^2}}=$$

$$a\sqrt{2c}\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{\left(\frac{c^2+a^2}{2c}\right)^2-\left(\frac{c^2-a^2}{c}\right)z+z^2}}.$$

(140) Est Problema 5^tum^. Bougainvillii ad pag^as^. 215^tam^. et seqq. ac Num^os^. CCXV^um^. CCXVI^tum^. ac CCXVII^mum^. l. c. Et si fontem adire velis, consule Alembertum in Problemate VI^to^. ac pag^a^. 208va. et seqq *Actorum Berolinensis Academiae* ad annum M.DCC.XLVI^um^. pertinentium.

(141) Vide l^os^. c^os^. ac potissimum *Tabulam* in *Adnotatione* 114ta. praememoratam, et §§^os^. 371um. 372^dum^. Capitis VIII^vi^. ad pag^as^. 560. 562. Operis *Magnitudinum Exponentialium etc.*

(142) Quid simile oculis Lectorum subieci in §°. 32do. sub finem, atque in *Adnotatione* 138va. Ceteroquin, ut antea monui, haec *imaginariorum* eliminatio familiaris iamdudum est Analystis; quinimo usque a percelebri Formula Cardanica Aequationum cubicarum *irreducibilium*, scilicet, usque a Saeculo XVI^to^.

(143) Integrale *Functionis* differentialis huiusce formae elaboratissimum, ac prae omnibus difficillimum exhibent Scriptores recensiti in *Adnotatione* 140ma. Sed huius pene abundantiae doctrina Pascalii non eget, eoquod superius ad calcem §^i^. 32^di^. et initio 33^ii^. idgenus Formulam Arcum Hyperbolae repraesentantem satis est luculenter edocuisse. Cetera enim Cartesii Algebram olent, neque ideo confundenda sunt cum Theoriae fundamentis.

(144) *Casus* singularis huiuscemodi Formulae est $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{z^2-g^2}}$, de quo etiam loquuntur §^us^. 27us. et *Adnotatio* 127^a^. Antequam vero illum iterum versem, admoneo haud recte fuisse primitus expositum ab Alembetto dum scripsit in Num°. XVIII^vo^.

ad

ad pag^{am}. 203^{iam}. l^{i}. c^{i}. referri ad Arcum aequilaterae Hyperbolae, cuius Axis 2*e* vice 2*g*. Bougainvillius tamen errorem typographicum emendavit in N°. CCVIII^{vo}. ad pag^{am}. 204^{tam}. Voluminis aut Partis I^{mae}. etc. *Integralis Calculi*.

(145) Omitto Semiaxem alterum a resolutione praefatae Aequationis procedentem veluti in §°. 28vo., scilicet, $\frac{(c-a)^2+h^2}{2c}$. Hic etiam Ellipsin adtinet *similem*, eoquod $\frac{(c+a)^2+h^2}{2c} : \frac{\sqrt{(c^2-a^2)^2+h^2(h^2+2a^2+2c^2)}}{2c} : \frac{(c-a)^2+h^2}{2c} \div$ ex Calculi *speciosi* Elementis. Plenissima est igitur huiusce geminae Ellipseωs in Plano et in Cono *harmonia*.

(146) Calculus enim eodem semper innititur fundamento, etsi prolixior ac fastidiosior ob novam *quantitatem* adiunctam. Sed algorithmi molestiam omnes norunt cum theoriae difficultate non confundendam.

(147) Totum semper regitur argumentum a Propositione Elementorum recensita in §°. 65to. (vide *Adnotationem*. 116^{am}.).

(148) Bougainvillius Num°. CCI^{mo}. pag^{a}. 199na. et Lemmate I°. Partis I^{mae}. Ista vero Elementi Arcus Elliptici forma, quam ex Pascalio deduxi, perfecte congruit cum nuperrima ab ingeniosissimo Le Gendre (vide l^{um}. c^{um}. in *Adnotatione* 113^{ia}. ad p^{am}. 617.) dudum tradita $d\varphi\sqrt{1-c^2.Cos^2.\varphi}$ (seu $d\varphi\sqrt{1-c^2.Sin^2.\varphi}$, aut $du\,\frac{\sqrt{b^2-Sin^2.u}}{b} = du\sqrt{1-\frac{1}{b^2}\,Sin^2.u}$ uti scripsit Malfattus in §°. 6to. et pag^{a}. 751ma. l^{i}. c^{i}. a *Nota* 23^{ia}.), in qua $d\varphi$ elementum significet Arcus Circuli circumscripti, cuius diameter sit Axis maior, huius medietas sit 1, atque *c* excentricitas Curvae. Nam si *Formula* reperta, et per ea, quae dicemus in sequenti §°., ad maiorem Axin devoluta, ita exponatur $\frac{1.dx}{\sqrt{1-x^2}}.\sqrt{1-c^2x^2}$, ubi $x=Cos.\varphi$, et $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\varphi$, liquido constabit adsertum. Id porro Maclaurino notum iam fuerat, quomodo patet ex calce Num^{i}. 806^{ti}. *Tractatus Fluxionum*, quum *k* excentricitas sit in Formula ab eo producta.

(149) Alembertus, Bougainvillius, Le Seur et Jacquierus, Cousinus etc. etc. in l^{is}. c^{is}. ex Formulis istis, quarum Denominatores sunt *binomiales*, eas derivaverunt *trinomialibus* Denominatoribus adfectas, quas supra tractavimus. Idem sentiendum de proxime sequentibus Formulis. Ergo Pascalii doctrina duplici modo ad postremas Formulas *integrandas* perducere potest.

(150)

(150) Consule Bougainvillium ad Lemma II^{dum}. Num^{em}. CCVII^{mam}. et pag^{am}. 203^{iam}. in *Remarque* etc. Partis I^{mae}.

(151) Formula quoque heic reperta unico duce Pascalio cum ea Bougainvillii congruit in Partis I^{mae}. Lemmate 2do. Num°. CCVI°. ac p^{a}. 202da. explicata. Novam hoc in postremo §°. adhibui methodum, quae tribus etiam antecedentibus aequo iure tractandis potis erat, ut de argumenti copia luculentius constaret.

(152) Hoc patebit ex §°. 65to., idemque admonui tam in *Antelogio* ad pag^{am}. IX^{am}., quam in *Adnotationibus* 116^{a}. et 147ma.

(153) *Iacobi Bernoulli Basileensis Opera* edita Genevae vertente anno M.DCC.XLIV°. in Volumine I°. ad Num^{um}. LX^{um}. et pag^{am}. 611^{am}. haec habent „ Cuius rei ra„ tio est, quod post differentialium formulas $\frac{a^2dz}{\sqrt{a^2-z^2}}$, $\frac{z^2dz}{\sqrt{a^2-z^2}}$, $\frac{a^2dz}{\sqrt{z^2+a^2}}$, „ $\frac{z^2dz}{\sqrt{z^2-a^2}}$, quae ope quadraturae Circuli et Hyperbolae integrantur, simpli„ cissimae fere videantur hae expressiones $\frac{z^2dz}{\sqrt{z^4-a^4}}$, $\frac{a^2dz}{\sqrt{z^4-a^4}}$, $\frac{a^2dz}{\sqrt{a^4-z^4}}$, „ $\frac{z^2dz}{\sqrt{a^4-z^4}}$, et similes, *quarum prima mediante Lineae Hyperbolicae*, secunda et ter„ tia Curvae nostrae Lemniscatae, quarta eiusdem et Ellipticae rectificatione integran„ tur. „ (Bernoullius Frater natu minor id equidem ignorabat, quum eodem tempore de Curva *Elastica* disserens (Num°. CLXXIV^{to}. Tomi I^{mi}.) scripserit *Constructio itaque Curvae habetur mediante quadratura spatii, cuius natura exprimitur per hanc aequationem* $4a^4zz - x^4zz = aa\,.^4$.). Nihilo tamen minus Alembertus (ideoque Bougainvillius), aliique pene omnes Analystae Bernoullium ipsum inventi honore privarunt. (Consulatur breve Procemium, quod exstat in pag^{a}. 200ma. *Actorum Berolinensis Academiae* pro anno M.DCC.XLVI^{to}.). Non autem id fecit Maclaurinus. (Vide pag^{am}. 316^{tam}. Voluminis II^{di}. *Fluxionum Tractatus* Parisinae editionis).

(154) Praeter l^{um}. c^{um}. in *Adnotatione* proxime superiori perlege *Acta Eruditorum Lipsiae* Septembris M.DC.XCIV. ad pag^{am}. 336^{tam}. atque sequentes.

(155) *Lemniscata* a Graeca voce λημνισκος (non λεμνισκος ut male scriptum in articulo *Lemnisque* Lucensis editionis *Encyclopaediae*) originem ducit. Lexicographorum plerique hoc vocabulum omiserunt, quod ex auctoritate Celsi significat *implicitum in longitudinem lineamentum*. (Henrici Stephani ΘΗΣΑΥΡΟΣ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΛΩΣΣΗΣ).

(156)

(156) Iacobus in *Actis*, quorum meminit *Adnotatio* 154ta., scilicet, Mensis Septembris anni M.DC.XCIV^{ti}. *Talem ex voto sese sistit Curva quatuor dimensionum, quae ..... formam refert iacentis notae octonarii* ∞, *seu complicatae in nodum fasciae, sive lemnisci*, d' un noeud de Ruban *Gallis*. Editoris Nota (b) ad pag^{am}. 610^{am}. Voluminis praecitati in *Adnotatione* 153^{ia}. Curvam ipsam *Lemniscatam* adpellat. Ioannes autem Bernoullius in *Actis* iisdem *Lipsiensibus* Mensis Octobris ad pag^{am}. 394^{tam}. Lineam eandem descripsit in formam erecti τῦ 8. (*Iohannis Bernoulli Operum omnium* T. I. N°. XIX^{no}.).

(157) Vide I^{os}. c^{os}. in praecedentibus *Notis*, ac signanter *Opera Iacobi Bernoulli* in Volumine I^{mo}. ad pag^{am}. 609^{nam}. Dissertationis, cui titulum fecit *Constructio Curvae accessus et recessus aequabilis ope rectificationis Curvae cuiusdam algebraicae*, necnon *Iohannis Bernoulli Opera omnia* Lausannae et Genevae edita anno M.DCC.XLII°. ad pag^{am}. 121^{am}. Disquisitionis ita inscriptae *Constructio facilis Curvae recessus aequabilis a puncto dato per rectificationem Curvae algebraicae*, in Volumine I^{mo}. Solutionem Problematis generalissimam primus edidit Varignonus in *Actis* Academiae Parisiensis ad annum M.DCC.III^{ium}. (pag^{a}. 140. et seqq. Voluminis Academici).

(158) *Giornale de' Letterati d' Italia* in lucem editum a celeberrimo Apostolo Zeno Venetiis in Tomo XXIX^{no}. pro anno M.DCC.XVII^{mo}., sed anno (uti dictum) sequente M.DCC.XVIII^{vo}. evulgato sub auspiciis Ioannis Gastonis Etruriae Principis ad Articulum X^{um}. et pag^{am}. 258^{vam}. Ibi exstat Diatriba sic inscripta *Metodo per misurare la Lemniscata del Sig. Giulio-Carlo de' Fagnani*. (Vide *Adnotationem* 18^{vam}.).

(159) Totus Fagnani labor innititur Hyperbola aequilatera et huiuscemodi Ellipsi, quae maiorem Axem suum ad minorem habeat in proportione $\sqrt{2}:1$ veluti in *primaria* Ungula Cylindri recti. Descriptio facilis istius Ellipseos, quam ego Pisis detexi, haud parum elegantiae ac nitoris speculationibus addet Fagnani. Hanc igitur brevi communicabo. Sit Circuli quadrans $IAV\Phi$ in Fig^{a}. 80ma., ductisque quotlibuerit Ordinatis Radio normalibus $SB, TC, VD, UE, XF, YG, ZH$ etc., ita a puncto A, Radii extremo, Rectae inflectantur, ut $AL=SB$, $AM=TC$, $AN=VD$, $AO=UE$, $AP=XF$, $AQ=YG$, $AR=ZH$ etc. Puncta L, M, N, O, P, Q, R etc. erunt in Ellipsi Fagnani, cuius Semiaxis maior EO respondens puncto E bisectionis Radii quadrantis generatoris, et $AE=EI$ Semiaxium minor. Nam producto Radio AI usque ad K ut sit $IK=AI$, erunt BS^2, CT^2 etc., sive AL^2, AM^2 etc. veluti $KB.BA$, $KC.CA$ etc. Ergo BL^2, CM^2 etc. in proportione τῶν $KB.BA-BA^2$, $KC.CA-CA^2$ etc., scilicet, $2AB.BI$, $2AC.CI$ etc. $=AB.BI$, $AC.CI$ etc., quae proprietatem sistit Ellipseos. Praeterea $OE^2=2AE.EI=2AE^2$, atque idcir-

co $OE : AE :: \sqrt{2} : 1$. *Excentricitas* huius Ellipseos Semiaxi est aequalis, iuxta Maclaurini expressionem saepius adhibitam, quemadmodum ex Conicis patet. Dum itaque gignitur Parabola conica producendo Ordinatas Quadrantis ita, ut $E\Upsilon$, $H\Omega$, $I\Delta$ etc. Chordas AU, AZ, $A\Phi$ eiusdem Quadrantis adaequent, ex adverso oritur singularis Ellipsis *Lemniscatae* inserviens statim atque eius Chordae AL, AM, AN etc. pares fuerint SB, TC, VD etc. Ordinatis Quadrantis. In hoc autem consistit nova Ellipseos, Parabolaeque *harmonia*. Ceterum qui prolixiorem quam par fuerat Fagnani methodum *syntheticam* funditus cognoscere cordi habuerit vel adeat I^um^. c^um^ in Adnotatione proxime superiori, vel eius Operum Collectionis Volumen II^um^. ad pag^am^. 343^iam^. et seqq. Maclaurini vero, qui de Fagnano siluit, tractatio *Lemniscatae* ipsius exstat praecipue in §°. 803^io^. ad pag^am^. 228^vam^. et seq. II^di^. Voluminis *Fluxionum* etc. gallice translatarum ab Iesuita Pezenas Massiliae Hydrographo. Ellipsis illa eadem est, quam summopere postmodum inlustravit egregius Geometra Le Gendre hisce fidelibus verbis *L' Ellipse dont l'excentricité est* $\sqrt{\frac{1}{2}}$ *est remarquable en ce que l'excentricité est egale au demi-axe coniugué; de sorte que cette Ellipse tient précisément le milieu entre le Cercle & l'Ellipse infiniment applatie ou la Ligne droite*. (Vide I^um^. c^um^. in *Adnotatione* 113^ia^. ad §^um^. XVII^um^. paginamque 679^nam^.).

(160) Quomodo *rectificatio* Curvae *Elasticae* pendeat ab eâdem Formula, quae praebet Arcum Lemniscatae, vide in praecitato Opere Maclaurini ad pag^as^. 313. 314. 315. 316. II^di^. Voluminis. Ars innititur omnis hoc fundamento, quod z sit Chorda *Lemniscatae*, Abscissa vero *Elasticae* aut *Lintealiae*. De illa tamen simpliciori *Elastica* loquor, cuius Aequatio fuerit $\frac{x^2}{2} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, sive potius $x^2 = \frac{a^2 dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, aut tandem universalius $dy = \frac{\pm x^2\, dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$ veluti inferius admoneo. (Iacobus Bernoullius in *Diario Eruditorum Lipsiae* anni M.DC.XCIV^ti^. atque XCV^ti^. ad pag^as^. 262. et 537. et in *Memorabilibus* Academiae Scientiarum Parisiensis pro anno M DCC.V^to^. pag^a^. 176ta. editionis Academicae ac praesertim ad Problema II^dum^., vel potius *Operum* etc. in Volumine I°. ad Num^um^. LVIII. (pag^a^. 576.) et ad Num^um^. LXVI. (pag^a^. 639.), atque in II°. Volumine ad Num^um^. CCII. (pag^is^. 976. 987., Volumen IV^um^. *Operum* Ioannis Bernoullii ad pag^am^. 242. Num^um^. CLXXIV., Tomus III^ius^. *Actorum* veterum Academiae Petropolitanae ad annum M.DCC.XXVIII^vum^. pag^a^. 64ta. et seqq. editionis Bononiensis anni M.DCC.XLII^di^. in Disquisitione Leonardi Euleri, cui titulus *Solutio Problematis de invenienda Curva, quam format lamina utcumque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscumque sollicitata*,

sollicitata, sive a pag^a^. 70ma. usque ad 85^tam^. editionis Petropolitanae anni M.DCC.XXXII^di^., *Encyclopaedia* in voce *Elastique* etc.).

(161) Nihilo tamen minus Iacobus ipse Bernoullius *Elasticae* inventor descriptionem huiusce Curvae, quae eodem redit atque τὸ $\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}$, ita depraedicavit *Ob graves caussas suspicor Curvae nostrae constructionem a nullius Sectionis-Conicae seu quadratura seu rectificatione pendere*. (Vide *Acta Eruditorum Lipsiensia* anni M.DC.XCIV^ti^. ad pag^am^. 272^dam^., *Tractatum* Maclaurini citatum ad pag^am^. 313^iam^. II^di^. Voluminis etc.). (Landenius I°. c°. *Philosophical Transactions etc.* T. LXV. pag^a^. 289na. solutionis a Maclaurino datae defectus Geometras monuit).

(162) Vincentius Riccatus tam in II^di^. Voluminis II^do^. *Opusculorum ad res physicas et mathematicas pertinentium* Bononiae in lucem editorum anno M.DCC.LXII°. (ad pag^i^. 89. 90.), quam signanter in I^a^. quatuor adiunctarum *Epistolarum* missa ad Pium Fantonum 12mo. Kal. Nov. M.DCC.LVII. (ad pag^as^. 123. 124.) de hac Formula egit *integranda* $\frac{z^2 dz}{\sqrt{aa + zz} \cdot \sqrt{aa - zz}} = \frac{z^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}$; sed nescio quo pacto tantam tantamque in re clarissima prolixitatem offenderit, ut elisionis duorum aequalium arcuum Ellipseωs opus habuerit.

(163) Consulatur *Adnotatio* 153^ia^. Ceterum Eulerus ipse in Volumine X^mo^. *Novorum Commentariorum Imperialis Academiae Petropolitanae* varias inter *Functionis differentialis* ibidem animadversae transformationes, quas complectitur Problema V^um^. ad pag^am^. 24^tam^. et seqq., hanc perhibet $\frac{z^2 dz}{\sqrt{f + gz^2} \cdot \sqrt{h + kz^2}} = \frac{dx}{g} \cdot \sqrt{\frac{x^2 - f}{(gh - fk) + kx^2}} = \frac{dx}{k} \cdot \sqrt{\frac{x^2 - h}{(fk - gh) + gx^2}}$ admodum in adplicatione ad Lemniscatam mea methodo prolixiorem. In casu enim facillimo, de quo nunc loquor, fit $\frac{z^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} = \frac{dx\sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{-x^2 + 2a^2}} = \frac{-dx\sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x^2 - 2a^2}}$, quorum *Differentialium* postremum ut praesidio Arcus Hyperbolici integretur, totius opus est artificii in §°. 44to. explicati. Diversa autem methodo, sed eodem ducente, Alembertus nuperrime usus est in Epistola ad cl. De La Grange, cuius meminit *Nota* 265ta. Idem quoque reperies in VII^mo^. *Opusculorum Mathematicorum* Volumine (pag^a^. 76ta. et seqq.). Namque tam $\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{f + gzz} \cdot \sqrt{h + kzz}}$ positivis omnibus f, g, h, k exsistentibus a rectificatione Ellipseωs obtineri docuit, quam et in aliis *casibus* consideravit

deravit simul cum altera oecumenica *Formula* $\frac{dz}{zz\sqrt{f+gzz}\cdot\sqrt{h+kzz}}$ sive $\frac{dz}{zz\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}}$.

(164) In praecitati *Diarii Italici* Volumine XXX[mo]. anni M.DCC.XVIII[vi]. exstat ad *Articulum* IV[um]. et pag[am]. 87[mam]. *Metodo di misurare la Lemniscata di Giulio de' Fagnani. Schediasma secondo.* Heic Arcum Parabolae, cuius Aequatio fuerit $3y=x^3$, scilicet, $\int dx\sqrt{x^4+1}$ Auctor cl. comparavit, aequalemque reperit Arcui *Lemniscatae*. Completa vero ipsius Parabolae Aequatio est $(a\sqrt{3})^2 y=x^3$, eiusque Arcus idcirco $\int\frac{dx\sqrt{x^4+a^4}}{a^2}$. Miror Alembertum in Voluminis I[mi]. *Opusculorum Mathematicorum Memoria* VII[ma]. ad pag[am]. 233[iam]. ne nominato quidem Fagnano Arcum *primae* Parabolae *cubicae* identidem expressum $\int dx\sqrt{x^4+1}$, et ab Hyperbolae atque Ellipseos *rectificatione* dependentem post undecim ferme lustra iam elapsa adseruisse. Si Scriptorem Italum memorasset et Hyperbolam *aequilateram* esse et Ellipsin eius esse *speciei* singularis, de qua mentio facta in *Adnotatione* 159[na]., addere potuisset. Silentium idem invenies in Parte I[ma]. Capite VII[mo]. Num°. CCLXXXVI[to]. Pag[is]. 483. 84. *Elementorum Calculi Integralis* PP[um]. Le Seur et Jacquieri. Meditationes quaedam antiquiores eiusdem Fagnani tam de alterius Parabolae $x^4=4a^3y$ Arcubus, quam de *Lemniscatae* Perimetri quadrante bifariam secando exstant in pag[is]. 256. 257. ac 258. Voluminis XXII[di]. praecitati *Diarii*, de quo loquitur *Adnotatio* 268[va].; atque de postrema Curvae bisectione egit iterum cl. Auctor in Articulo V[to]. Tomi XXXIV[ti].

(165) Verba Leibnitii sunt haec in *Lipsiensibus Actis* Mensis Augusti anni M.DC.XCIV[ᵗ]. „ Sane si quadranda esset Figura ordinatarum $\sqrt{a^4+x^4}$ „ nimirum $\int dx\sqrt{a^4+x^4}$, „ per extensionem Curvae Hyperbolicae res praestaretur „. Ioannes Bernoullius in *Animadversione etc.*, quae exstat in Num°. XXIII[io]. Tomi I[mi]. eius *Operum* ad p[am]. 137[am]. ita rescripsit. „ Verum Vir celeberrimus demonstrationem huius publicare „ haud gravabitur: ostenderetur enim curvas Parabolae cubicalis primae et Hyper- „ bolae invicem dependere, et unam alteram mensurare; id quod nobile pror- „ sus, et omnino novum esset inventum in Geometria „. (Adde *Diarium Lipsiae* anni M.DC.XCV[i]. ad pag[am]. 64[tam].). Ceterum iam supra ostenderat eâdem in pag[a]. τὸ $\int dy\sqrt{y^4+a^4}$ Arcum esse praedictae Parabolae, et ideo, quum istud Integrale ad constructionem perducat ex Leibnitio *Isochronae-paracentricae*, ad quam ex Bernoulliis ducit etiam Arcus *Lemniscatae*, nemo non videt Arcum postremae Lineae, illiusque Parabolae unum conficere idemque Problema

usque

usque ab anno M.DC.XCIV^{to}. Le Seur et Iacquierus in *Elementorum* I^{o}. paullo antea c^{o}. adfirmarunt „ Donc la rectification de la premiere Parabole cubique de„ pend de celles de l'Ellipse, et de l'Hyperbole ensemble, et non pas de l'Hy„ perbole seule *comme l'ont crû quelques grands Geometres* „. Rectius Alembertus ad pag^{am}. nuper citatam „ Ainsi la rectification de la premiere Parabole cubique „ ne dépend pas de la rectification de l'Hyperbole seule, *comme le croyoit M.* „ *Leibnitz*. „

(166) Proprietates quasdam eiusdem Lineae mechanicas, atque opticas contemplabor in *Perellianis*, occasione praesertim Epistolae Pauli Frisii ad Angelum Fabronium Academiae Pisanae Curatorem, quae exstat in Volumine LIII^{io}. *Literatorum Diarii* Pisis edito vertente anno M.DCC.LXXXIV^{to}. Non autem is ego sum, qui Frisio, Perelliique vitae Scriptoribus ceteris mordicus succensere in animo habeam. Omittam levia, veluti quod pag^{is}. 57. 58. enumerentur inter casus celeberrimi (ἐπαφῶν) *tactionum* Problematis a Perellio resolutos tam ille Elementorum, in quo per tria puncta *data* transire debeat Circuli quaesiti Circumferentia, quam alter Euclideus, in quo ea contingere debeat ternas rectas pariter *datas*; quod inter anecdota recenseatur Peritia de Fulginiensis agri Torrente, quem vocant incolae *Marroggia*, quum ex adverso impressa iam fuerit in Volumine IX^{no}. ad pag^{am}. 217^{mam}. et seqq. usque ad 229^{nam}. *Collectionis* secundae Florentinae de Re aquaria Scriptorum etc: etc. Seria non perfunctorie, sed nequidem contumeliose pertiogam, ratus a prima usque iuventute (quemadmodum alias innui) haud parum decoris et dignitatis scieotiis omnibus defuturum si disciplinae severiores satyricae orationis stilo, aut immoderati fabulatoris more agerentur. Unum tamen religiose servabo, incorruptum, scilicet, sanctumque veritatis cultum iuxta Numismatis Regii in instauratione cusi Scientiarum Academiae Taurinensis vertente anno M.DCC.LXXXIII^{io}. posticum apophtegma VERITAS ET VTILITAS, atque nuperrimam Nummariam epigraphen iubente FERDINANDO III^{io}. Magno Etruscorum Duce ac Domino meo in subditorum exemplum insculptam LEX TVA VERITAS. Cetera nunquam curabo.

(167) Ita est in pag^{a}. 259na. Voluminis XXIX^{ni}. *Diarii Italici*; neque emendatus fuit error tam in eodem Volumine, quam in Tabula aut *Indice correctionum* adposito ad calcem XXX^{mi}. Tomi. Postmodum Auctor ipse errorem suum, fortasse monitus, castigavit in Art^{o}. V^{o}. ad pag^{am}. 259^{nam}. Tomi XXXIV^{ti}.

(168) Ad vocabulum *Lemniscate*. Editio tamen Lucensis praebet Aream $\frac{-(aa - xx)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{a}{3}$ vice τῶ $\frac{-(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a} + \frac{a^2}{3}$. Habet quoque in voce *Elastique* 1703. pro 1705. (Vide *Notam* 160.).

(169) In Capite VIII^vo^. *Novae Theoriae Magnitudinum Exponentialium etc.* ad pag^am^. 553^tiam^.

(170) Perlege idem Caput VIII^vum^. ad pag^am^. 552^dam^. *Operis* praecitati. De illa rursum Lineae generatione in *Perellianis* meis disceptabo ut eam, quam Leonardus Eulerus in illustrandam Testudinem Florentinam protulit Curvam *ichnographicam* Aequatione praeditam $y^2 = 3x^2 - \frac{4x^4}{a^2}$, eum mea penitus consentire liquido constet. (Videatur Pars I^a^. Voluminis XIV^i^. pro anno M.DCC.LIX^no^. typis edita an. M.DCC.LXX^mo^. *Novorum Commentariorum Academiae Petropolitanae* in Disquisitione *De Formulis Integralibus duplicatis*).

(171) Consulatur Adnotatio 66ta. Dum autem epocham sisto mensurae Superficiei Cyclocylindricae a Robervallio traditae ante annum M.DC.XXXV^am^., ideoque etiam Ungulae Cylindri recti, menda quamplurima castigabo de dimensionum epochis Curvarum quarundam Superficierum in Dissertatione occurrentia, cui titulus *Ratio complanandi Superficies curvas Corporum quorumlibet Geometricorum F. K.* alias inter comprehensa a Volumine IX^no^. *Supplementorum Diarii Lipsiensis* ad Sectionem II^dam^. et Pag^am^. 45^tam^. Triangulorum a Circulorum *maximorum* arcubus in Sphaera clausorum mensuram Auctor tribuit Iacobo Bernoullio (an. M.DC.XCI^mo^.), et Thomae Lagoyo (an. M.DCC.XIV^to^.), quum ex Adnotatione I^ma^. idgenus honor Cavalerium adtineat (an. M.DC.XXXII^do^.). Nihil addo de Triangulorum Sphaericorum area a minoribus Sphaerae Circulis circumscripta, quum ad Trigonometriae supplementum omnium primus nuperrime hoc argumentum tractaverit Alembertus in Volumine IV^to^. *Mélanges de Philosophie et de Mathématique de la Société Royale de Turin*, ac signanter in §°. 1°. et pag^a^. 127ma. *Recherches Mathématiques sur différens sujets*, cuius §^i^. titulus sic inscriptus *Sur les triangles sphériques, formés par des arcs de petits cercles*, atque in calce epocha habetur *ce* 23. *Novembre M.DCC.LXIX*. Adserit praeterea Superficiem Conorum obliquorum dimensam fuisse ab *anonymo* Geometra Gallo veluti *Historia* testatur *Regiae Scientiarum Academiae Parisiensis* pro anno M.DC.XCVIII^vo^., quum ex adverso hunc Geometram non *anonymum*, sed Petrum Varignonum, istum non primum, sed Aegidium Robervallium ante annum M.DC.XLVII^um^. de Superficiebus illis mensurandis ac complanandis disseruisse *Adnotationes* 16^a^. ac 429na. et 431ma. documentis abunde adlatis ostendant. Insuper addit portiones Superficierum Sphaeroidum atque Conoidum primos complanasse Bernoullios vertentibus annis M.DC.XCVI^to^. ac XCVII^mo^., absqueoquod dimensionis integrarum harumce Superficierum mentionem fecerit a Cristiano

Christiano Hugenio usque ab anno M.DC.LVII^mo^. et LVIII^vo^. complanatarum, ut ipse fatetur in Opere suo *de Horologio oscillatorio* Lutetiae Parisiorum edito anno M.DC.LXXIII^io^. a pag^a^. 72da. ad 77^mam^. Partes, subiungit, Superficiei Coni recti Grandum prae omnibus invenisse quomodo in Plano extendantur anno M.DC.XCIX^no^. in *Vivianeorum demonstrationis Problematum Appendice* Florentinis typis excusa, quum ex adverso ipsemet Grandus adfirmet in pag^a^. XIV^ta^. Praefationis ad Tractatum suum *de Quadratura Circuli et Hyperbolae*, 2^dae^. editionis (M.DCC.X.), id praestitisse Ioannem Bernoullium anno M.DC.XCVI^to^. Ulterius progreditur, nunciatque Vincentium Vivianum perinde ac si anno M.DC.XCII^do^. simul cum Leibnitio primitus invenisset complanationem partium Sphaericae Superficiei, oblitus Propositionis 30^mae^. Libri IV^ti^. *Collectionum Mathematicarum* Pappi Alexandrini, qua idgenus complanationem, et *quadraturam* M.CC. annis elapsis ante Vivianum perfecerat, adeo ut Matheseos historiam haud parum offenderit Nomismatis Viviano consecrati ab eximio Sculptore Ioanne Baptista Foggino epigraphe QVI PRIMVS ET SPHÆRICAS SVPERFICIES NIL RECTI HABENTES NOTIS RECTANGVLIS OSTENDIT ÆQVAS. Accedit tandem in calce Prooemii Superficies Corporum rotundorum universaliter complanavisse P^em^. Reyneau in Articulo 614to. Libri VIII^vi^. τῆς *Analyse démontrée*. Sed hoc inventum ab Isaaco potius Barrowio ante Scriptorem illum fuisse evulgatum in *Lectionum Geometricarum* XII^ma^. editionis Londinensis an^i^. M.DC.LXIX^ni^. (pag^a^. 105. §§. I. II. Fig. 156. 57.) neminem latet, ne dicam de Andrea Tacqueto Iesuita, qui primus omnium fundamenta iecit dimensionis rotundarum Superficierum in Propositione 26ta. Libri IV^ti^., ac praecipue in 14ta. Libri V^ti^. *Cylindricorum et Annularium* editi anno M.DC.LIX^no^. (Vide Volumen alterum *Collectionis* eius Operum ad pag^as^. 121. 122. editionis Antuerpiae anni M.DC.LXIX^ni^.). Bonum illum Scriptorem, qui italice vertit Tomum XVIII^vum^. τῆς *Histoire de l'Eglise* Racinii, editionis Florentinae anni M.DCC.LXXXIII^ii^., excusatum libenter velim dum pag^a^. 285ta. de Pascalii studiis mathematicis loquens nomen *Roulette*, nempe Cycloidem, ignarus reddidit *la Girella*. Ignoscendum tamen haud iudico de mensura Superficierum scribenti veram Superficierum historiam penitus oescivisse.

(172) Hasce equidem proprietates admodum facile est explicare sola etiam geometrica Synthesi duce. Quod quum non effecerim in 1°. c°. *Magnitudinum Exponentialium etc.* (vide *Notam* 169^nam^.), nunc brevi adimplebo. Modus ducendi tangentem a puncto quolibet I Lemniscatae (Fig^a^. 81ma.) in eo, quod sequitur, continetur. Describo super axem unius Folii Semicirculum *ABC*, et Parabolam conicam *ADC* inscriptam in Quadrato *ACDE*, ac *primum* verticem habentem in *A*, quae ternae

ternae simul Curvae Tholum Vivianeum comitantur ex alibi demonstratis. Lemniscata AEC ea Linea est, quae gaudeat abscissis AF aequalibus chordis Semicirculi AG, sive ordinatis Parabolae HK, ordinatis vero FI aequalibus ordinatis HG Semicirculi ipsius. Patet istud tam ex descriptione Curvae superius tradita, quam ex altera in §^{o}. 58vo. prope finem exposita. Si tangentes igitur GL, KM Semicirculi ducantur atque Parabolae, Geometria docet Subtangentem pro puncto I Lemniscatae quaesitam repraesentari a quarta geometrice proportionali post $dIF : dFA :: IF$, sive post $dGH : dGA :: GH$, aut post $dGH : dHK :: GH$. Sed $dGH : dHK$ est in ratione composita $dGH : dHA = GH : HL$, et $dHA : dHK = HM : HK = 2HA : HK$. Subtangens itaque Lemniscatae ad punctum I erit quarta geometrica proportionalis post $2GH . HA : HL . HK :: GH$, scilicet $\frac{HL . HK}{2HA}$, aut $\frac{HL . AF}{2HA}$, vel bifariam secto axe in N erit Subtangens $\frac{HL . AF}{\frac{AF^2}{AN}}$, sive $\frac{HL . AN}{AF} = \frac{IF^2 . AN}{AF . HN}$, quemadmodum Analysis *speciosa* suppeditat. Quod Aream adtinet, in aperto positum esse liquido constat. Nam ex Curvae genesi $PB =$ Abscissae elemento, scilicet Elementum Areae $= OQ . PB = OP . CQ$ (propter *similia* Triangula in Circulo) $= - \frac{CO^2}{CA} . dCO = RS . - CS$ in Parabola Apolloniana CRE, Elemento nempe Trilinei $CRED$. Partes igitur Areae Lemniscatae, si computentur a *nodo* A, aut vertice C, geometricam *quadraturam* admittunt ex partibus petitam Trilinei notissimi Parabolici, totaque Semifolii Area, quum Trilineo integro par sit $CRED$, trientem Quadrati axis AC, duorumque simul Foliorum, scilicet totum Curvae Spatium, quatuor trientes Quadrati ipsius peraequabit. Ceterum patet ex ipsa Lineae, in qua sumus, a Circulo generatione angulum Curvae et Axeos in A semirectum esse, propterea quod Abscissa *nascens* AG ad Ordinatam *nascentem* GH sit in aequalitatis Ratione. Ordinatarum *maxima* $ET = BN = \frac{AC}{2}$ respondet Abscissae $AT = AB$ chordae Quadrantis, scilicet, $CA : AT$, $(2CA : 2AT) :: \sqrt{2} : 1$; quod consonat Fig^{ae} 168^{vae}. in Tab^{a}. XXII^{da}. *Introductionis* Crameri (vid. pag^{as}. 495. 96. vel *Exemplum* I^{um}. §^{i}. 192^{mi}. in Capite XI^{mo}.). Intersectio autem V perimetrorum Circuli et Lemniscatae eo loci cadit, quo $VX = OQ$, $NX = NQ$, $CX = AQ$, $AX = AO$. Igitur Axis AC ita sectus erit in puncto X, ut $CA : AX : XC \div$, nimirum in *extrema ac media* Ratione. Quae omnia in septem Numeris praecitati *Operis* demonstratione omissa conlegeram.

(173) Pag^{a}. 229na. II^{di}. Voluminis memorati in *Adnotatione* 159na.

(174) Sic praeter spem ope istius non equidem novae, sed ab aliis etiam animadver-

sae

sae Aequationis *trigonometricae* intima utriusque Lemniscatae cognatio statuitur, quae ab Aequationibus more solito expressis difficilius constaret. Neque omittendum censeo Denominatorem $Cos^2.\varphi$ vel $a\ Cos^2.\varphi$ sistere Ordinatam *trigonometricam* aut Radium unius ex Ovalibus Villalpandi, quemadmodum initio §i. 53ii. dicturus sum, scilicet, unius ex celeberrimis Curvis illis, quas illustrare placuit Vincentio Viviano (vide *Adnotationem* 416tam.), et fama est ab Iesuita Griembergero repertas fuisse. Notandum etiam Denominatorem eundem, sed inversum, $\frac{1}{Cos^2.\varphi}$ vel $\frac{a}{Cos^2.\varphi}$ determinare Radium unius ex Lineis *medianis* a Clairautio consideratis, et in §°. 50mo. animadversis. Quibus positis et duo *Lemniscatae* et *Ovalis* et *Mediana* praedictae arcto foedere coniunguntur.

(175) Descriptionis Maclaurinianae facilitas heic sine Hyperbole demonstrata in mentem mihi revocat cl. Petrum Paolum, nunc in Pisano Lyceo sublimioris Matheseos Antecessorem, ingenio praestantissimum, et de omnigena Analysi optime merentem, eam procul dubio antelaturum fuisse constructioni suae minus eleganti Curvae *aequalis illuminationis*, si Aequationem huius Curvae $u^2 = Cos.\,2z$ (pag. 173ia. *Opusculorum Analyticorum* = *Liburni* M.DCC.LXXX. *ex Typographio Encyclopaediae*) ad Lemniscatam Bernoulliorum ($u = \pm\sqrt{Cos.\,2z}$) pertinere meminisset. Constructio ab Ioanne Bernoullio tradita l°. c°. in *Adnotatione* 156ta. ad definiendas *maximas* Curvae Ordinatas absque usu infinite-parvorum facile ducit. Quum enim ex §°. 40mo. Ordinata $y = \sqrt{az - zz}$ = Ordinatae Circuli, erit y *maxima* dum $z = \frac{a}{2}$, eritque simul $= \frac{a}{2}$, et Abscissa Ordinatae *maximae* respondens $x = \sqrt{az + zz} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, ac denique radius z' Ordinatae ipsi *maximae* conveniens $= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}} = a$ radio Circuli Bernoulliani, sive $\frac{b}{\sqrt{2}}$, supposito b Axe unius Folii. Radius igitur Ordinatam *maximam* determinans angulum efficiet 30° cum Axe Curvae, eoquod $\frac{a}{2} : a ::$ Sinus ad Radium $:: \frac{1}{2} : 1$. Triangulum ergo verticem habens in Curvae centro vel *nodo*, basem in recta coniungente duo puncta *maximi* recessus ab Axe in eodem Folio, est aequilaterum inscriptum in Lemniscatae semisse. Idem, sed diversa methodo, et infinite-parvis usus, invenit Fagnanus in *Problemate* Imo., quod *Adnotatio* recenset 178va. sub finem.

(176) Ita dixit Ioannes Bernoullius in l°. pluries citato. Haec autem Tangentium in *nodo* ad semirectos angulos super Axem inclinatarum proprietas liquido patet ex Aequatione trigonometrica $z = \pm a\sqrt{Cos.\,2\varphi}$. Nam τὸ $\sqrt{Cos.\,2\varphi}$ limitem habet

 in

in $\varphi = 45°$, quo praetergresso *imaginarium* evadit. Et in hoc *limite* fit $Cos.\, 2\varphi = Cos.\, 90° = 0$, scilicet Radius $z = 0$ aut enascentis Lemniscatae minimum Latus, cum Tangentis directione ideo congruens.

(177) Ad pag^{am}. etenim 122^{dam}. l^{i}. c^{i}. in *Adnotatione* 156ta. Circulus Bernoullii centrum habens in centro aut *nodo* Lemniscatae ita perimetrum secat eiusdem Lineae, ut intersectionum puncta sint ea *maximorum* recessuum ab Axe. „ *Peripheria* . . . . *transit per eius punctum remotissimum ab Axe* „ sunt verba Bernoullii. Quod ut eveniat, Radius Circuli ad Axem Folii ex Adnotatione 175ta. rationem habeat necesse est ut 1 ad $\sqrt{2}$, veluti superius ostendi.

(178) Cuncta haec demonstravimus in *Adnotatione* 175ta., mireque consentiunt cum iis a Fagnano Infinite-parvorum Calculi ope fusius expositis in Volumine XXXIV°. *Diarii Literatorum Italici*, edito vertente anno M.DCC.XXIII^{io}., ad Articulum V^{tum}., et a pag^{a}. 197ma. usque ad 208^{vam}. Supposito enim unius Folii Axe a', ipse reperit Ordinatam *maximam* $y = \frac{a'}{2\sqrt{2}}$, et Abscissam respondentem $\frac{a'}{2\sqrt{2}} . \sqrt{3}$, scilicet in hypothesi praecitatae *Adnotationis*, qua statuitur $a' = b$, et $a = \frac{b}{\sqrt{2}}$, Ordinatarum *maxima* est $\frac{a}{2}$, respondens Abscissae $\frac{a}{2} . \sqrt{3}$, quemadmodum supra. (Vide eiusdem Voluminis *Problema* I^{um}. ad pag^{am}. 202^{dam}.).

(179) Circulus ille, quo Bernoullius utebatur ad Lemniscatae descriptionem, eo inscio *focos* eiusdem Lineae veluti in Cassiniana Ellipsi signabat. Si Fagnanus ambo Curvas hasce unam eandemque Lineam *geometricam* esse suspicatus unquam fuisset, quamplurimas illius proprietates, ex. gr. Tangentes, *Maxima etc.*, facilius admodum invenire atque ostendere potuisset absque praesidio Calculi *differentialis* (vid. Volumen superius XXXIV^{um}. etc. in *Problemate* II^{do}. ad pag^{am}. 204^{tam}.). Nam Varignonus usque ab anno M.DCC.III^{io}. in *Memorabilibus* Scientiarum Academiae Parisiensis elegantissimam methodum docuit ducendi Tangentem a puncto quolibet Cassinianae. (Vide ad pag^{as}. 181. 82. editionis anni M.DCC.XX. *Maniere prompte et facile de trouver les Touchantes de l'Ellipse de M. Cassini*). Etsi Varignonus de Cassiniana loquens Lemniscatam cum ipsa consentientem haud viderit, ideoque de *maximis* non egerit Ordinatis, totum tamen hoc opus ab eius constructione sic brevi conficitur. Namque ex doctrina Varignoni si detur punctum quodlibet I, Radiique ab ipso ad *focos* ducantur BI, $B'I$ (Fig^{a}. 82da.), et in directione $B'I$ sit IO tertia continua geometrica proportionalis post Radios eosdem $B'I$, BI, iungaturque BO, huic perpendicularis IQ erit Tangens quaesita. Exinde patet quod, quum in punctis D, D' intersectionum Lemniscatae ac Circuli, centrum C et diametrum BB' habentis, ob angulum rectum in D atque $B'D : BD : DS$ ∺, sit etiam

BS

BS perpendicularis ad *AC*, idcirco fiat Tangens *DT* parallela ad *AC*, atque *D* (vel *D'*) punctorum omnium in Semifolio remotissimum ab Axe. Malfattus infiniteparvis plerumque usus neque tam elegantem, neque tam simplicem adhibuit modum ducendi Tangentes, inveniendique *Maxima* Lemniscatae, quia fortasse (sciretne postea quaeram Cassinianae et Lemniscatae algebraicam *identitatem*) Varignoni laborem iamdudum vulgatum nesciebat. (Consulantur *Adnotatio* 6[ta]. mei *Prodromi* in *Nota* 1[a]. *Antelogii* huius Exercitationis citati, et Opusculum *Della Curva Cassiniana etc.* Papiae editum anno M.DCC.LXXXI[mo]., ac praesertim ad Propositionem V[am]. Partis I[mae]. (pag[a]. 11. et seqq.) et Propositionem IX[am]. ad pag[as]. 25[tam]. atque seqq.).

(180) Curva est etenim mendax in Astronomia *arithmetica*, in Astronomia vero *physica* impossibilis et absurda. Lata iam fuit Mathematicorum omnium sententia.

(181) Videtur Malfattus hoc ignorasse die 2[da]. Aprilis M.DCC.LXXXI., qua scriptum Bonfiolio Malvetio consecravit *Opusculum* memoratum in calce *Adnotationis* 179[nae]. Nunquam enim nec in Praefatione nuncupatoria, neque in contextu Lemniscatam nominavit Bernoulliorum, etsi unica fuerit Cassinianae *species* ac forma idonea *synchronismo* suo suscipiendo. Gregoryus omnium primus proprietates Cassinianae praecipuas adnotavit in *Transactionibus philosophicis* Londinensibus Septembri labentis Anni M.DCC.IV[ti]. relatis (Num[o]. 293. ad Schediasma I[um]. *De Orbita Cassiniana = By Dr Gregory*), sed impressis anno M.DCC.VI[to]., rursumque in Volumine I[mo]. *Astronomiae Physicae et Geometricae Elementorum* ad Librum III[ium]. sub titulo *Additio ad Propositionem VIII*[vam]. *praecedentem excerpta etc.* in pag[a]. 331[ma]. 2[dae]. editionis Genevensis anni M.DCC.XXVI[ti]. Transformationes varias Cassinianae Curvae complexus est Auctor ille percelebris, de ea abunde loquutus a pag[a]. 326[ta]. usque ad 334[tam]. praecitati Voluminis Astronomici. Focos, Flexus, Ordinatas-*maximas* rite recteque observavit, formamque Lemniscatae (ab ipso tamen haud nominatae) acquisitum iri tum, quum *focorum* distantia ad totum Lineae Axem fuerit in proportione $1:\sqrt{2}$. Circulum, qui centrum habeat in centro Curvae, ac diametrum distantiae *focorum* aequalem, Ordinatas *maximas* designare monuit, non secus atque Ioannes Bernoullius de sua edixerat Lemniscata. Haec igitur Linea, quam Ioannes Dominicus Cassinus in suo Tractatu *de origine et progressu Astronomiae*, gallice *De l' origine et du progrès de l' Astronomie, et de son usage dans la Geographie et dans la Navigation* (vide *Recueil d' Observations etc. avec divers Traitez Astronomiques = a Paris =* editionis anni M.DC.XCIII[ii]. ad pag[am]. 36[am]. et Volumen VIII[vum]. *Actorum* veterum Academiae Parisiensis Scientiarum etc.) rei Planetariae promovendae idoneam supposuerat, a Caelesti Scientia in Geomerriam translata inventori suo palmam pene praeripuit. Qui etenim Cassini nomen in hoc

etiam

etiam celebrare studuerunt Lineam eandem, quam ipse modeste descripserat l^{o}. c^{o}. *Cette Ligne est une maniere d' Ellipse* etc., *Cassinoidem* nuncupare iniuria sunt adgressi, vel ut graece vocabulum sonat, Curvam Cassini lineamenta imitantem, quemadmodum *Conchois* Conchae, *Cissois* (a Κισσὸς hedera, εἶδος forma) Hederae folii etc. Eos inter a Graeca lingua aberrantes non modo cum Montuela obstupesco fuisse homines eruditos, sed, quod magis mirandum sit, etiam Matheseos simul et Graecae eloquentiae peritum Eduardum Corsinum in pag^{a}. 268va. *Institutionum Mathematicarum*, quas Paperinianis typis Florentiae edidit vertente anno M.DCC.XXXI^{mo}. Quem dum nomino, absit longissime ut imparem censeam genuinis Graecorum verborum significationibus interpretandis, aut confundere audeam cum Graeculis illis, qui nocturna diurnaque manu versaverint Literas in Lucerna fictili insculptas (Fig^{a}. 83^{ia}.) ex Insularum quadam Maris Aegei nuper advecta, quae feliciorem Oedipum adhuc expectant, aeternumque fortasse, oblato etiam praemio, expectabunt.

(182) *Usage de l'Analyse de Descartes pour découvrir les propriétés des Lignes géométriques de tous les Ordres* editionis anni M.DCC.XL^{mi}. (*Eloge de Jean-Paul De Gua* vita functi anno M.DCC.LXXXV°. a pag^{a}. 63^{ia} ad ..^{mam}. *Historiae* Academiae Scientiarum Parisiensis pro anno M.DCC.LXXXVI°.).

(183) In Articulo *Ellipse de M. Cassini*. Linea Cassiniana (ipse ait) *si* $aa = 2f^2$ aura *la figure d'un 8 de chiffre, ou lemniscata* (*Voyez Lemniscate*).

(184) Adnotatio in calce Pag^{ae}. 552^{dae}. mei Operis *Magnitudinum Exponentialium etc.* Mense Augusto ineunte Anni M.DCC.LXXXI^{mi}. Magno Duci Domino meo consecrati. (Vide Volumen I^{um}. Academicum sic inscriptum *Mémoires de l' Académie Royale des Sciences* = *Années* 1784. 1785. = *a Turin etc.* M.DCC.LXXXVI. *Premiere Partie* = *Mémoire Historique* ad pag^{am}. LIV^{tam}., *Philosophical Transactions* Vol. LXXIII^{ii} ^{m}. *London* M.DCC.LXXXIII. in Parte II^{da}. ad pag^{am}. 485^{tam}. *June* 5.). De MS. ipsius *Operis* specimine haec mihi scripserat Geometra eximius Gregorius Fontana sub die 7ma. Maii M.DCC.LXXXI. *Già anni sono Ella mi fece leggere manoscritto un suo Opuscolo sul Calcolo Esponenziale, che mi parve tanto bello, e tanto mi piacque, che non mi ricordo di aver letto in molti e molt' anni cosa, che più mi piacesse.*

(185) Alembertus l^{o}. c^{o}. in Adnotatione 183^{ia}., aliique ab Aequatione Cassinianae $(x^2 - 2fx + f^2 + y^2)(x^2 + 2fx + f^2 + y^2) = (a^2 - f^2)^2$, in qua x Abscissam a centro numeratam, y Ordinatam orthogonalem, a Semiaxem, atque f unius focorum a centro distantiam significent, facto $a^2 = 2f^2$ Aequationem $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ deducunt. Ego autem versa vice ab Aequatione Lemniscatae ad punctum quodlibet in Axe distans a centro per intervallum $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$, quod sit

Abscis-

Abscissarum initium et caput, relatae, nimirum ab Aequatione $(x^2+y^2)^2+(2a^2-2\sqrt{2}.ax)(x^2+y^2)=\frac{a^4}{4}$, eam cum Cassiniana congruentem inveni, quae simplicius exposita formam habet $(x^2+y^2)(4f^2-4fx+x^2+y^2)=(a^2-f^2)^2$, vel $(x^2+y^2)^2+(4f^2-4fx)(x^2+y^2)=(a^2-f^2)^2$, tum quum $f=\frac{a}{\sqrt{2}}=b$.

(186) *Giunte al primo Schediasma sopra la Lemniscata interito nel Tomo* 29. *di questo Giornale; del Sig. Conte Giulio-Carlo de' Fagnani* in praecitato Volumine, de quo loquitur Adnotatio 178va. (Vid. *Problema* III^{um}., eiusque *Corollaria* 1um. ac 2um. ad pag^{as}. 205. 206. etc.). Fagnanus Sectoris centrici cuiuscumque *CIA quadraturam* nimis e longinquo petivit, et facta de more Chorda $IA=z$, aequalem reperit illius Arcam *Functioni* algebraicae $\frac{\sqrt{a^4-z^4}}{4}$ in praedicto Corollario 2do. At hîc pedem sistit, et haudquaquam novit viditque Aream ipsam elegantius breviusque parem esse $\frac{a^2}{2}.\frac{xy}{z^2}$ sive $\frac{a^2}{2}.\frac{xy}{x^2+y^2}$ omni *irrationalitate* reiecta, veluti paulo post demonstrabo. Quod dum ostendero consequetur ad Lemniscatam Bernoullianam necessario pertinere Aequationem $\frac{\sqrt{a^4-z^4}}{4}=\frac{a^2}{2}.\frac{xy}{z^2}$. Et re quidem vera eadem est cum $z^4=a^4(1-4Sin^2.\phi.Cos^2.\phi)=a^4[1-(1-Cos.2\phi)(1+Cos.2\phi)]=a^4(Cos.2\phi)^2$, scilicet, $z=\pm a\sqrt{Cos.2\phi}$. Qui non trigonometrice, sed per canones vulgatos Algebrae Cartesianae *aequipollentiam* ipsam demonstrare tentaverit incidet in Aequationem $(x^2+y^2)^4-a^4(x^2+y^2)^2+4a^4x^2y^2=0$, aut $[(x^2+y^2)^2+a^2(x^2+y^2)-2a^2x^2][(x^2+y^2)^2+a^2(x^2+y^2)-2a^2y^2]=0$, cuius factor alteruter Lemniscatam denotat Bernoulliorum, et quidem *identicam*, quum *species* x, y *convertibiles* sint ex Aequationis primitivae natura.

(187) Demonstrationem vide geometricam in Adnotatione 172da.

(188) In *Praelectionibus* meis mathematicis, quibus olim Ephebos Magni Ducis ad Nobilium Institutum studiorum caussa advenientes erudiebam, sublimiores et magis reconditas non modo Hyperbolae, verum etiam universarum Sectionum Coni adfectiones a Lineae rectae et Circuli passionibus ex Euclide praecognitis mirum quam facile et simpliciter enucleare mihi contigerit. (Consulantur *Adnotatio* 92da. atque initium §^{i}. 49^{ni}.). Novus iste et molestissimus labor fortasse aliquando Geometrarum oculis subiicietur.

(189) Propositio I^{a}. Partis I^{mae}. *Opusculi* italice scripti, cuius meminit prope finem *Adnotatio* 179na.

(190) Subrogata Hyperbolae Ellipsi, eadem est Curvae generatio, quam Maclaurinus

nus protulit in Num^{o}. 803^{io}. ad pag^{am}. 228^{vam}. ac Fig^{am}. 306^{tam}. Tabulae VIII^{vae}. secundi *Fluxionum* Voluminis.

(191) Perlege Montuclae Volumen I^{um}. *Historiae Matheseos*, ubi in Lib^{o}. V^{to}. Partis I^{mae}. ad pag^{as}. 311. 312. ex auctoritate Procli Diadochi *Spiricarum* Persei Geometrae originem tradit. Vide quoque Adnotationem 24^{tam}. et $\S^{um}$. 61um. Ceterum quomodo Lineae *Spiricae* cum *Functionibus* quibusdam *Circuli transcendentibus* consentiant a Le Gendre expositis in *Memorabilibus* Scientiarum Academiae Parisiensis relatis ad annum M.DCC.LXXXVI^{um}. (*Notae* 113. 148. 283.) constabit ex meo Curvarum earundem typis parato *Specimine* in *Analectis* etc.

(192) Haec epocha liquet ex dictis in *Adnotatione* 19na.

(193) Caput III^{ium}. Libri II^{di}. Tomi II^{di}. *Tractatus Fluxionum* a pag^{a}. 225ta. usque ad 236^{tam}. sive a Num^{o}. 798vo. usque ad 812^{dum}.

(194) Titulum habet *De Sectionum Conicarum rectificatione, eiusque usu*. (Pag^{a}. 36ta. et seqq.). Latine versum in Editione Bononiensi anni M.DCC.LXII^{di}. est idem tamen Opusculum cum altero Italico typis excuso vertente anno M.DCC.LVII^{mo}., et sic inscripto *Dell' integrazione della Formula* $\dfrac{dz\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{p+qzz}}$ *per mezzo degli Archi Ellittici ed Iperbolici = Dissertazione Analitica di Vincenzo Riccati della Compagnia di Gesù* in Volumine IV^{to}. (a pag^{a}. 3^{ia}. usque ad 81^{am}.) Collectionis Lucensis Carolo Iuliano curante in lucem publicam editae *Memorie sopra la Fisica e Istoria Naturale, di diversi Valentuomini* ex Typographeo Vincentii Iuntini. Heic ad pag^{am}. 4^{tam}. enumerantur Formulae Maclaurini, ad 3^{iam}. vero Fagnani in hac provincia exornanda primi memorantur labores; quod ultramarini Scriptores non fecerant. (Consulatur *Adnotatio* 201ma.). (Vide insuper Caput XII^{um}. *Institutionum Analyseos* praecitatarum in *Nota* 21ma. ad pag^{am}. 191^{am}. II^{di}. Voluminis).

(195) Vide Numeros 804um. atque 805^{tum}. *Tractatus Fluxionum etc.*

(196) In Num^{o}. 806to. ad pag^{am}. 231^{mam}. II^{di}. Voluminis.

(197) Numerus 809^{nus}. ad pag^{am}. 233^{iam}. Operis praecitati.

(198) Ista huiusce Theoriae ad Physicen applicatio exstat in Capite V^{to}. et postremo Libri II^{di}. *Traitè des Fluxions*, cuius Capitis titulus (pag^{a}. 264. T^{i}. II^{di}.) *Des regles générales pour la résolution des Problêmes*. Adnotasse obiter iuverit tempus descensus etc. Corporis gravis per Circuli Quadrantem ope Arcus Lemniscatae (scilicet et Elasticae, uti patet ex *Nota* 160ma.) a Maclaurino recensitum in Num^{o}. 887mo., multo ante ab Iacobo Bernoullio inventum fuisse. (Vide prope finem Opus postu-

postumum *Ars coniectandi*, sive Στοχαστικὴ, editionis Basileensis anni M.DCC.XIII^{ii}., ubi *in Tractatu de Seriebus infinitis etc.* legitur apertissime *Tempus descensus Penduli per Quadrantem Circuli ad tempus per Radium* quemadmodum Curva Elastica ad Axem suum). Quae omnia dum cogito, in admirationem haud levem me concitatum fuisse profiteor semel atque Epistolam perlegi Vincentii Riccati, scriptam Iordano *Fratri carissimo* pridie Nonas Ianuarii anni M.DCC.LIX^{ni}. (Tom. II. *Opusculorum* etc.), in qua ad pag^{am}. 157^{mam}. et seqq. de eodem agit ille Problemate nec Bernoullium, nec Maclaurinum, nec Lemniscatam, neque Elasticam nominans. Ad pag^{am}. 281^{am}. eiusdem praecitati *Tractatus* Bernoullius adserit Leibnitium fortasse omnium primum demonstravisse in *Diario Eruditorum Lipsiensi* anni M.DC.LXXXIV^{ti}. (pag^{a}. 474) Logarithmicae Subtangentem esse *constantem*. Theoremata enim Hugenii de Logisticae proprietatibus, quas inter ad Numerum 4um. est *constans* Subtangens, serius vulgata fuerunt, scilicet Lugduni Batavorum vertente anno M.DC XC°. Torricellius autem ante annum M.DC.XLVII^{um}. id ostenderat inter alia eius Curvae symptomata, quae continentur in MS. Palatino sub titulo *de Hemihyperbola*, aut universaliori *de novis Lineis*.

(199) *Element du Calcul Intégral par les PP. Le Seur & Jacquier = Premiere Partie* = ad pag^{as}. 455. 56. ac Num^{um}. CC.LX^{mum}. Fortasse omnium primi Scriptores isti duas *Formulas* Hyperbolici Arcus clariter universaliusque evolverunt. Nam Bougainvillius (aliique pene omnes) in Num°. CC.VII^{mo}. ad pag^{am}. 203^{iam}. sui *Tractatus* Partis I^{mae}. neque alteram explicuit Formulam ita, ut termini singuli singulis prioris Formulae comparari invicem possent, neque lectorem admonuit, eodem manente q in gemina *Formula*, discriminis aut oppositi signi Coëfficientis secundi termini, scilicet, $a - qa = a(1 - q)$ quo ad primum Axem (Num°. CCVI°.), et e contra $qa' - a' = a'(q - 1)$ quo ad Axem secundum, sola contentus sententia *On trouvera la même transformée*, cuius rationem adhuc absconditam in §°. 43^{io}. inquirere et aperire curabo.

(200) Errasse mihi videtur Maclaurinus dum scripsit ad pag^{am}. 228^{vam}. II^{di}. *Fluxionum* Voluminis suam Synthesin prosequutus τὸ $\frac{-\dot{x}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-xx}}$ verti ex substitutione $x = \frac{2z\sqrt{z}}{1+zz}$ in $\frac{\dot{z}}{\sqrt{z}\cdot\sqrt{1+zz}}$, quum ex adverso hoc contingat positivo *differentiali* $\frac{\dot{x}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-xx}}$. In hac Fluxionum theorice saepissime accidit ut ea, quae a simplicioribus methodis deriventur, difficilioribus adnumerare, aut inter difficiliora repetere quodammodo gestiant Elementographi. Ex. gr. in N°. XLII^{do}. ad pag^{am}. 84^{tam}. Partis I^{mae}. *Tractatus* Bougainvillii resolvitur facile

τὸ

τὸ $\int \frac{dz}{z\sqrt{a+bz^n}}$, et rursum Num°. CC.XLV[to]. ad pag[am]. 248[vam]. renovatur artificium ipsius anteactae substitutionis ad inveniendum $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+fx^3}}$, etsi postremum hoc Integrale minorem habeat prae iam resoluto universalitatem. Idgenus vitium ab Elementorum praesertim Scriptoribus cane peius et angue vitandum esse putaverim.

(201) Non modo Maclaurinus, verum etiam Alembertus, dum in pag[a]. 217[ma]. *Actorum Berolinensium* pro anno M.DCC.XLVI[to]. ad Num[um]. 3[ium]. 8[vi]. Problematis egit de integratione Differentialis $\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{a\pm xx}}$, Fagnani laboris oblitus fuit. Silentium idem invenies in Minimorum *Calculi Integralis Elementis* ad Caput VII[um]. Partis I[ae]., seu Num[um]. CC.LXXIX[um]. ae pag[as]. 478. 79.; ubi Functionem $\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{bb-xx}}$ longius equidem, quam par fuerat, integraverunt.

(202) Est enim secunda ex quatuor Formulis *trinomialibus* Maclaurini, iam resoluta in versiculo 13[io]. Pag[ae]. 88[vae].

(203) Methodus universalis exstat in Problemate 5[to]. Capitis XV[ti]. Partis I[mae]. *Tractatus* Bougainvillii ad Numeros CC.XV., CC.XVI., CC.XVII. ac pag[as]. 215[tam]., atque sequentes, ex Alemberti disquisitione transcripta. In Elementis PP. Minimorum pluries citatis ad Caput VII[um]. Partis I[ae]. hoc ipsum Integrale cum suis *analogis* singulariter pertractatur, sed obliquius fortasse et molestius. (Vide eiusdem *Operis* Num[um]. CC.LXXII[dum]. sive pag[as]. 469[nam]. 470[am]. et 471[mam].).

(204) Consule memoratum nuperrime Commentatorum Newtoni Volumen ad Num[os]. CC.LX. atque CC.LXII., et Pag[as]. 454[tam]. ac 457[mam].

(205) Ita etiam iidem Minimi egerunt in Num°. CC.LXXX[mo]. l[i]. c[i]. ad pag[am]. 480[am].

(206) Scilicet in *Adnotatione* 159[na].

(207) Quum Alembertus natus fuerit Parisiis die Novembris 17[ma]. labentis Anni M.DCC.XVII[mi]. (videatur *Elogium*, cuius meminit *Nota* 2[da]. *Antelogii etc.*), liquido constat Academiae Berolinensi *investigationes* suas dicavisse dum annum agebat vigesimumnonum. Sed etiam Anno vertente M.DCC.XLI[mo]., scilicet, aetatis suae vigesimoquarto coram Scientiarum Academia Parisiensi errores aliquot *Analyseos demonstratae* P[is]. Reyneau de Calculo Integrali emendaverat (Pars I[a]. *Tractatus* Bougainvillii ad pag[as]. 125[am]. 129[nam]. et alibi); quae tanti extimata fuit emendatio, ut in Academicorum Albo Vir ille summus immatura ea tempestate describi meruerit.

(208)

(208) *Notam* perlege 19^nam^.

(209) Signanter in I°. c°., de quo loquitur *Adnotatio* 124ta., et rursum in Volumine altero Academico nuper memorato, sed in lucem edito Berolini (quemadmodum ex *Nota* 20ma. patet) anno M.DCC.L^mo^. ad pag^as^. 249^nam^. et seqq. *Suite des Recherches sur le Calcul Intégral etc. = Troisième Partie =*.

(210) Ab Eratosthenis Cyrenaei Epigrammate ad Ptolemaeum Aegyptiorum Regem (*Commentarii* Eutocii Ascalonitae in Librum II^dum^. Archimedis *de Sphaera et Cylindro*) procul dubio constat Conicorum inventionem coaevam Platonis fuisse, primumque, qui de illis seripserit Curvis, Menechmum Eudoxi Cnidii discipulum. Octavus enim Epigrammatis versus est Μὴ δὲ μενεχμείους κωνοτομεῖν τριάδας, quem eruditissimus Graecarum literarum interpres Antonius Salvinus ita latine vertit *Neque coni-sectiones et Triadas Menechmeas adhibere*, veluti MS. Viviani manu exaratum testatur, quod adservo, recentiusque Dominicus-Maria Becuccius ex Matris sorore consobrinus meus, quem utpote Attica Romanaque eruditione praestantem honoris caussa nomino, *Neque Menechmei in Cono secare ternarios numeros*, ego vero transtulerim potius *Neque Menechmi in Cono secare tres Lineas*. Nomina singularia Conicarum harumce nequidem Archimedis tempestate circumferebantur. Nam Liber eius sic inscriptus Ὀρθογωνίου κώνου τομὰ Ἀρχιμήδου τετραγωνισμὸς παραβολῆς tituli partem postremam a Scholiaste adpositam noscit teste polyhistore Fabricio, Liberque alter Περὶ ἀμβλυγωνίων κωνοειδέων καὶ σχημάτων σφαιροειδέων argumentum idem evidentissime solvit. (*Bibliotheca Graeca Ioannis Alberti Fabricii* in Libro III^io^. ad Pag^am^. 547^am^. editionis Hamburgensis anni M.DCC.VII^mi^.). (*Archimedes* Graecolatinus editus Basileae cura Ioannis Hervagii vertente anno M.D.XLIV^to^. in Libro *Archimedis inventa de Conoidalibus et Sphaeroidibus figuris*).

(211) Rursum perlege I^um^. antea citatum in *Adnotatione* 195ta. Hoc equidem in sola Ellipsi expertus est Vir egregius, sed nemo inficias ibit id etiam facile potuisse in Hyperbola, et eo facilius post universalem, quam detexerat, methodum unius in alteram Curvam *analyticae* transformationis. (Consulatur *Nota* 115ta.). Hoc fortassis in animo habebat Maclaurinus, quemadmodum Alembertus ipse suspicatur his verbis in calce scriptis §^i^. XXI^mi^. *Commentariorum Berolinensium* ad annum M.DCC.XLVI^um^. *Les différentielles dont on a parlé dans les art. precedens, sont de toutes celles qui contiennent un radical de trois termes, les seules que M. Mac-laurin ait reduites à la rectification de l'Ellipse ou de l'Hyperbole. Encore n'a-t-il employé pour cette reduction qu'une espece de Synthese, comme nous l'avons déja dit, sans montrer la route qu'il a suivie pour y parvenir*. Idgenus transitum ab Ellipsi ad Hyperbolen Ioannes Wallisius iamdudum inter Britannos perspicuum nativumque reddiderat (*Nota* 18va. *Antelogii*, *Operum omnium* Tomus II^us^. ad pag^as^. 374. 375. etc.), et nescio quo pacto ab hac deinde theorice declinaverit doctissimus Rober-

tus Simsonus. Nuncupat enim (pag^{x}. 56^{a}. Operis sui *Sectionum Conicarum etc.*) duas eiusdem Hyperbolae partes Hyperbolas *oppositas*, et in *Definitione* ad pag^{am}. 87^{am}. Hyperbolas duo coniugatas vocat *quatuor Hyperbolas coniugatas*. Iniuria quidem, quum geminatae Curvae *Systema* illae tantummodo sint, respondentes (uti dictum) geminae superpositae Ellipsi. Figura 4^{a}. abunde satis ostendit ex. gr. Parallelogrammata innumera circumscripta aequalia esse tam in Ellipsium, quam in Hyperbolarum *Systemate*. Diametri vero *coniugatae* in Systemate Hyperbolico angulos efficiunt a recto in infinitum decrescentes, et cum asymptotis tandem sese confundentes, dum illi ex adverso in Elliptico Systemate a recto usque ad *maximum* crescunt, vel usque ad *minimum* decrescunt ab asymptotis ipsis constitutum, deindeque regressu per eosdem gradus facto redeunt ad rectum.

(212) A pag^{a}. 198va. usque ad 234^{tam}. Partis I^{ae}. sui *Tractatus*.

(213) In *Lectionibus* et 1^{a}. c^{o}. ab *Adnotatione* 125^{a}. usque ad dimidiam Pag^{am}. 472^{dam}.

(214) Tomus II^{us}. *Fluxionum* ad Numerum 805um. ac Pag^{as}. 230^{mam}. et 231^{am}.

(215) Vid. Numerum CC.XI^{um}. Partis I^{ae}. *Tractatus* Bougainvillii ad pag^{am}. 207^{mam}.

(216) *Tractatus* Bougainvillii in Numeris CC.XIII. CC.XIV. et CC.XV.

(217) Num. CC.VIII. et CC.IX. *Operis* praecitati, quorum in postremo fiat $f = o$.

(218) Si consulatur eiusdem *Tractatus* Numerus CC.XV., aliique citati in *Adnotatione* 203^{ia}., difficultas singularis huiusce facillimi casus procul dubio patebit.

(219) In *Memoria* VII^{a}., cui cl. Auctor titulum fecit *Supplément aux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Prusse de* 1746. *et* 1748. ad pag^{as}. 231. 232.

(220) Duae Formulae sunt, quae sequuntur. Post molestam substitutionem $z + \sqrt{zz+bb} = y$ fit $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz+bb}} = -\frac{bbdy}{\sqrt{2}\cdot y\sqrt{y}\cdot\sqrt{yy-bb}} + \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{yy-bb}}$, *dont* (pag^{a}. 232.) *la premiere dépend de la seconde, et dont la seconde dépend de la rectification de l'hyperbole seule*. Quarum Formularum utraque Arcum Hyperbolae includit.

(221) Bougainvillius etc. in §^{o}. 3^{io}. Num^{i}. CCXXVII^{i}. ad pag^{am}. 226^{tam}. Vide huius *Exercitationis* §^{um}. 40^{mum}.

(222) Problema 8^{vum}. ad Num^{um}. 32um. et Pag^{am}. 216^{am}. ac 217^{mam}. *Actorum Berolinensium* pro anno M.DCC.XLVI°. (Vide *Notam* praecedentem 211^{mam}., ubi quae sint singulariter Maclaurini formulae *trinomiales* Alembertus clariter narrat. Non ita de *binomialibus*).

(223) *Donc ..... dépend toujours de ....., c'est à dire de la rectification de l'Hyperbole (art.* 20.), *& quelquefois de celle de l'Ellipse* in loco nuper adserto. Neque in articulo 20°., nisi ad articulum regrediaris 18^{vum}., de Hyperbola constat *aequilatera*; species autem Ellipseos nullo loco enunciatur.

(224)

(224) Consulantut *Opuscula*, quorum meminit *Adnotatio* 194ta. ad Pag^{as}. in proxime sequenti adamussim enumeratas.

(225) *Opusculum* a Riccato italice editum in Corollariis ad pag^{as}. 48. 52. (typographicus occurrit error $\sqrt{q}:1$ vice $\sqrt{2}:1$) 54. 59. 63. 67. 74.; illud vero latine vulgatum in Corollariis ad pag^{as}. 71. 73. 74. 76. 78. 80. 82.

(226) Sic exposui in *Adnotatione* 164ta.

(227) Pag^{a}. 233da. I^{i}. *Opusculorum* Voluminis, Num^{ri}. CCXXVII^{mi}. Partis I^{ae}. *Tractatus* Bougainvillii, Corollarium I^{um}. Problematis VII^{mi}. ad pag^{am}. 212. *Actorum Berolinensium* etc.

(228) *Donc en general* $x^{\pm\frac{n}{2}}dx(a+bx+cxx)^{\pm\frac{p}{2}}$ *dépend de l'integration des deux differentielles* $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a+bx+cxx}}$ *et* $\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{a+bx+cxx}}$, *c'est a dire de la rectification des sections coniques. Il faut observer de plus que l'integration de ces deux differentielles ne dépend que de la rectification d'une seule Ellipse et d'une seule Hyperbole, comme il est aisé de le voir par les articles precedens* 15.—27. *Car on trouve, par exemple, que l'integration de* $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{fx-bb-xx}}$ *dépend de la rectification d'une hyperbole, & de plus de la rectification d'une ellipse qui donne l'integration de* $\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{fx-bb-xx}}$. *De même on trouve que* $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{xx\pm fx+bb}}$ *et* $\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{xx\pm fx+bb}}$ *dépendent l'une & l'autre de la rectification de la même Ellipse & de la même Hyperbole; & ainsi des autres.* (*Comment. Berolin.* M.DCC.XLVI. ad pag^{am}. 215. Numerum XXXIV. Corol. V^{um}.).

(229) Vide *Notam* 153^{iam}. ac §^{um}. 40^{mum}. simul cum §° 42do., quibus disseritur de utraque *Functione* $\frac{z^2dz}{\sqrt{z^4-a^4}}$, $\frac{dz}{\sqrt{z}\cdot\sqrt{z^2-1}}$. A prima etenim Formula (ex ipso §°. 42do.) quam Fagnani labor complexus fuerat, ubi $b=0$, a positivum, et c negativum, altera, quam nunc animadvertimus, illico derivatur.

(230) Sic admonui in *Adnotatione* 228va.

(231) Praefatio *Tractatus* Bougainvillii ad calcem pag^{ae}. XVII^{mae}.

(232) In Capite XV°. Partis I^{ae}. praelaudati *Tractatus* ad pag^{as}. 218. et 219. haec scripsit Bougainvillius. *Dans le cas présent des racines imaginaires, l'intégration de* $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz\pm fz+bb}}$ *dépend des mêmes ellipse & hyperbole que* $\frac{dz}{\sqrt{z}\cdot\sqrt{zz\pm fz+bb}}$ *en*

faitant

faisant les mêmes suppositions. De qua adfectione Functionum ita comparatarum nullum alibi verbum occurrit in eodem *Tractatu*.

(233) Corollarium Problematis VI^{i}. ad Pag^{am}. 210^{am}. *Actorum Berolinensium* pro anno M. DCC. XLVI°. „ *excepté la differentielle* $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz - fz + ff}}$ *qui dépend de l' Ellipse seule*.

(234) Totum transcripsit Corollarium ipsum Alemberti Bougainvillius in loco nuper adserto (*Nota* 232.) praeter verba recensita in *Adnotatione* 233^{ia}.

(235) Consule Num^{um}. CC.XVII. ad pag^{am}. 217^{am}. Partis I^{mae}. Bougainvillii *Tractatus*, sive potius Problema VI^{um}. in toties citatis *Commentariis Berolinensibus* pro anno M.DCC.XLVI^{to}. ad eius *casum* secundum.

(236) Hoc equidem liquido constat ex Num^{o}. CC.IX^{no}. Capitis XIV^{ti}. Partis I^{ae}. Bougainvillii *Tractatus*.

(237) Numerus CC.X. *Tractatus* Bougainvillii ad pag^{am}. 205^{tam}. initio Capitis XV^{ti}. Partis I^{mae}. vel *Comm. Berolin.* pro anno M.DCC.XLVI^{to}. ad pag^{am}. 204^{tam}. Integrale autem istud ex illis est a Maclaurino detectis. (Vid. pag^{am}. 91^{am}. huius *Exercitationis* in lineis 1^{a}. ac 6ta.).

(238) Linea 2da. Pag^{ae}. 206^{tae}. l^{i}. c^{i}. in Bougainvillii *Tractatu* ex fontibus Alemberti. Hic autem $-m = -\frac{f}{2}$, sive $m = \frac{f}{2}$, propteteaquod radix negativa Aequationis $\frac{3ff}{4} + fu - uu = 0$ sit $-\frac{f}{2}$ ex Elementis. (Consule initium Num^{i}. CC.X^{mi}. ipsius *Tractatus*).

(239) In hac reductione continetur Linea recta aut *algebraicum* Integrale negativum, quod memoravi superius. (Vide ipsius Bougainvillii Num^{um}. CC.IX.). Idgenus Integrale postmodum computabo.

(240) Sine adhibita substitutione $\frac{f}{2} + u = x$ Integrale istud ad Arcum Ellipticum pertinere constat luculentissime ex Formulis, quae sunt in calce §^{i}. 34^{ti}. Pascalii ergo doctrina breviori itinere huc perduxisset.

(241) Veros directosque Hyperbolae et Ellipseos arcus adpello quum Formulae ope exprimantur in §§^{is}. 31mo. ac 32do. primum traditae, quae respondet Num^{is}. CC.I. ac CC.VI. Capitis XIV^{ti}. Bougainvillii *Tractatus*.

(242) Est enim $x = \frac{f}{2} + \frac{\frac{3ff}{4}}{y} = \frac{f}{2}\frac{\left(y + \frac{3f}{2}\right)}{y}$. Fortasse in tanta Calculorum copia si aliquis error irrepserit, honestum urbanumque Lectorem precor mihi indulgere

dulgere curis molestiisque undequaque distracto. Scriptis autem *anonymis* me nunquam responsum iri Geometrae sinant, quum *anonyma* omnia plerumque etiam asperrima fore (ne dicam *acephala*) repetitis exemplis domesticis periculum fecerim.

(243) *Remarque* 2ª. ad pagᵐ. 216. praecitati Voluminis pro anno M.DCC.XLVIᵗᵒ. Bougainvillius etc. ad Numerum CC.XXVI. Capitis XVIᵗⁱ.

(244) *Mémoire septieme* Tᵈ. Iⁱ. Opusculorum Mathematicorum, et signanter illa, cui cl. Auctor titulum fecit *Supplement aux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Prusse de* 1746. *et* 1748. ad pagˢˢ. 233ⁱᵃᵐ. ac 234ᵗᵃᵐ.

(245) Saltem a meo recensiti *Opusculorum* Voluminis Exemplari.

(246) Ut methodus directa Alemberti clarius pateat, meliusque eum postmodum describenda comparetur, en ipsius verba in Iᵒ. eᵒ. post reductionem Integralis ipsius in tres partes $\frac{2\sqrt{uu \pm fu + bb}}{\sqrt{u}}, + 2\int\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{uu \pm fu + bb}}, + \int\frac{fdu}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{uu \pm fu + bb}}$. *Or on trouvera que* $2\int\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{uu \pm fu + bb}} \pm \int\frac{fdu}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{uu \pm fu + bb}}$ *dépend de l'hyperbole seule, parceque en faisant* (pagᵉ. 234.) *les transformations prescrites pag.* 206. *et* 208. *des Mémoires de Berlin de* 1746., *les quantités, qui dépendent de la rectification de l'ellipse, se detruiront dans la transformée; car soit, par exemple,* $u \pm \frac{f}{2} = z$, $AA = bb - \frac{ff}{4}$, *et* $z + \sqrt{zz + AA} = y$, *on aura pour transformée* $\frac{2dy\sqrt{y}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{yy - AA \mp fy}} - \frac{2AAdy}{\sqrt{2}\cdot y\sqrt{y}\cdot\sqrt{yy - AA \mp fy}}$, *qui se redait à la rectification de l'hyperbole etc.*

(247) Vide praecedentem *Adnotationem*, methodumque consule indirectam in praecitata *Remarque* 2ᵈᵃ. (*Nota* 243ⁱᵃ.).

(248) Idem repetitur error in pagᵉ. 218ᵛᵃᵉ. linea 15. Partis Iᵃᵉ. Bougainvillii *Tractatus*. (Videantur *Commentarii* Berolinensis Academiae pro anno M.DCC.XLVIᵗᵒ. ad pagˢˢ. 208. 209.). Neque errorem istum emendatum reperio in prolixa admodum vitiorum typographeil correctionumque *Tabula*, cui Alembertus ipsemet titulum fecit *Errata pour les Mémoires de Mr. d'Alembert imprimés dans les Volumes de* 1746. 1747. 1748. in Berolinensibus *Actis* anni M.DCC.Lᵐⁱ. a pagᵃ. 403ⁱᵃ. usque ad 417ᵐᵃᵐ.

(249) Consulatur *Adnotatio* 228ᵛᵃ. Ceterum etiam in Formula $\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz + fz + ff}}$ Hyperbolam illam animadverto, cuius superius memini dum agebam de totius Calculi

culi evolutione, tametsi hoc Integrale ipsius Arcum non complectatur ex demonstratis, ne theorices universalitati quidpiam deesse aliquis censeat.

(250) Bougainvillius l°. c°. ad pag^am^. 216^tam^. Error tamen corrigendus *Les axes* etc. scribendumque *Les demi-axes* etc. veluti exstat in pag^a^. 203^ia^.

(251) Productum etenim *extremorum* Quadratum *medii* peraequat.

(252) In *Commentariis Berolinensibus* etc., atque in *Opusculis mathematicis*.

(253) Hoc ex celeberrimi Scriptoris *Operum* citatione fusius ostendi in §°. sequente 44to.

(254) Ad pag^as^. 17^mam^. atque 18^vam^. *Dissertationis* Italicae memoratae in Adnotatione 194ta.

(255) Perlege *Adnotationem* 199^nam^.

(256) *Acta Berolinensia* pro anno M.DCC.XLVI^to^. ad pag^as^. 202. 203.

(257) Id ostensum iam fuit in §§^is^. 25to. ac 31mo. huiusce *Sectionis* II^dae^.

(258) Haec Parabola congruit illi ab Alemberto versatae, quemadmodum constat ex linea 1^a^. pag^ae^. 203^iae^. Partis I^mae^. Bougainvillii *Tractatus*.

(259) Vide l^um^. et p^am^. citatam in linea 19ta., necnon *Elementa* etc. Le Seur et Jacquieri in Num°. antea dicto CC.LX. Partis I^mae^. ubi memorant Aequationem $(q+1)z^2 + bb = bx$.

(260) Est locus adamussim indicatus ab *Adnotatione* 246ta.

(261) Bougainvillius in Partis I^ae^. etc. Problemate 5to., vel Num°. CC.XV. ad pag^am^. 215^tam^. atque sequentes. *Commentarii Berolinensis Academiae* in Problemate VI^to^. alias citato, et pag^a^. 208va. atque sequentibus.

(262) Volumina duo Bougainvillii labente anno M.DCC.LXI^mo^. mihi humanissime mutuaverat Ioannes Del Turco, quocum et cum Iano-Alberto De Soria, Physicen ea tempestate in Pisana Academia profitente, atque ob eloquii festivitatem et copiam perinsigni, familiaritas summa. Quidquid alii contra senserint, grati animi significationem publice testari erga viros praesertim eruditos (quorum primus ingenio praestantissimus, nunc Bibliothecae Pisanae Praefecti Adiutor, et ad erudiendos Equites Stephanianos Geographiae atque Historiae Praeceptor) ac mearum de praesenti *Exercitatione* meditationum primam epocham sistere haud inutile duco.

Exempla passim occurrunt, Commentatoresque ipsi Newtoni inter recentiores pag^a^. X^ma^. Praefationis *Elementorum Calculi Integralis* hoc habent ...... *nous pourrions en appeller au temoignage de plusieurs Géometres, qui ont vû le fond de cet Ouvrage il y a plus de vingt-cinq ans*.

(263) *Dissertationem* istam recensui in *Adnotatione* 194ta. Quum autem ad illam rursus consulendam supervacaneam operam diutissime collocaverim eam quaerens in

Etruscis

Etruscis pene omnibus Bibliothecis, Ianus Attilius Arnolfinus, Lucensis Reipublicae Patricius atque Senator amplissimus, in universa Mathesi ac praesertim Hydraulice adprime versatus (cuius immaturam mortem boni omnes lugent) praecitatum Volumen initio vertentis anni mihi vix per Epistolam expostulanti illico commodavit.

(264) Adnotatio 240^{mā}., et Bougainvillius I°. c°. ad Num^{um}. 3^{ium}. pag^{ae}. 206^{tae}.

(265) Est 5um. in Bougainvillii *Tractatu* inter illa Capitis XV^{ti}. (Vide *Notam* 261^{am}.). Posteaquam hoc periculum feceram non paucis abhinc annis Alembertiani Problematis, ad manus meas pervenerunt biennio ante *Commentarii Berolinensis Academiae* pro anno M.DCC.LXXX^{mo}. editionis M.DCC.LXXXII. Summa equidem voluptate perlegi in *Extrait d'une Lettre de M. d'Alembert à M. de la Grange du* 14. *Décembre* 1781. virum cl. iterato calculo (cuius tamen exemplum praeteriit) errorem suum emendasse anni M.DCC.XLVI^{ti}. (pag^{is}. 376. 77.), mecumque plenissime consensisse. Hoc autem Differentiale, de quo nunc loquor, $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz+fz+bb}}$ exponi etiam posset per $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{z+a}\cdot\sqrt{z+c}}$, quemadmodum Alembertus ipsemet docuit, Arcu solius Ellipseos et Linea recta integrandum. (Vide Numerum 1um. ad pag^{am}. 377^{mam}. et *Casum* VIII^{um}. Tab^{ae}. in p^{a}. 115.). Casum unicum omisit a me contemplatum $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz+fz+ff}}$. Ceterum τὸ $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{c+x}}$ ab unius Arcu Hyperbolae simul cum Recta dependere, necnon $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x-c}}$, $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{c-x}}$ ab Arcubus Hyperbolae et Ellipseos una cum Recta Linea, veluti Alembertus noviter statuit (Num^{is}. 2. 3.), scriptum est in eiusdem Tab^{ae}. *Casibus* V°. VI°. ac VII^{mo}.

(266) *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* in Volumine X^{mo}. ad pag^{as}. 8. 9. *Biformem* adpello Ellipseos Arcuum expressionem eoquod cuiusque Arcus ad eandem Abscissam pertinentis valorem tam positivum, quam negativum hic in mei Calculi usum tantummodo animadverto, neglectis valoribus ceteris *Functionis* ipsius vere *infinitiformis* ad instar Circuli arcuum, Curvarumque omnium in se redeuntium.

(267) In Hyperbola non secus atque in Parabola. (Vide I^{um}. nuperrime memoratum).

(268) In Voluminibus XXIV^{to}. (Art. XII. *Giunta allo Schediasma inserito nel XXII. Tomo del Giornale sopra la maniera di rettificare la differenza di due Archi in infinite specie*

specie di Curve Paraboliche, con una nuova proprietà della Parabola d' Archimede a pag^{a}. 363^{ia}. ad 376^{tam}.) ac XXVI^{tu}. Veneti *Litteratorum Diarii* (pag^{t}. huius 266ta.) relatis ad annos M.DCC.XV^{um}. et M.DCC.XVI^{um}. At potissimum perlegendum postremum in *Articulo* VI°. usque ad pag^{am}. 280^{mam}., cui Auctor ipse titulum fecit *Teorema, da cui si deduce una nuova misura degli Archi Ellittici, Iperbolici, e Cicloidali*. Omnia autem incipiunt a Fagnani antiquiori Schediasmate (Art. VII.) *Nuovo metodo per rettificare la differenza di due Archi (uno de' quali è dato) in infinite specie di Parabole irrettificabili, con la soluzione del Problema proposto nel XIX. Tomo di questo Giornale pag.* 438. = ad pag^{am}. 229^{nam}. Tomi XXII^{di}. eiusdem *Diarii* impressi vertente anno M.DCC.XV^{to}. Alembertus idem Auctoris Itali inventum concelebravit ita scribendo in *Opusculorum Mathematicorum* Voluminis V^{ti}. pag^{a}. 244ta. *Est absolument* cette methode *analogue à celle, qui est aujourd'hui connue des Géometres, par les savantes recherches de MM. Fagnani & Euler*.

(269) Praesertim in *Epistola Iacobo Mariscotto, in qua determinantur arcus Sectionum Conicarum, quorum differentia rectificabilis est*, data Bononiae III^{io}. Non. Oct. anni M.DCC.LV^{ti}. (Vide *Opusculorum ad res Physicas, et Mathematicas pertinentium* Tomum II^{dum}. a pag^{a}. 36ta. ad 50^{mam}. usque). Rursum idem occurrit in Epistolis ad Fantonum, Malfattum, et Iordanum Fratrem eodem Volumine comprehensis.

(270) Consulatur Prooemium Dissertationis Euleri ad pag^{am}. 3^{iam}. Voluminis X^{mi}. *Novorum Commentariorum Academiae Petropolitanae*, qua in pagina, praeter cetera, id demonstrasse fatetur acutissimus Auctor, dubiumque omne Maclaurini et Alemberti de hac geometrica *rectificatione* amovisse. Quod Fagnani Itali inventum quanta postea diligentia et acumine prosequuti sint Eulerus, Landenius, atque Le Gendre, liquido constat ex postremi Analystae *Dissertationibus* praecitatis (*Notae* 113. et 114.), ac potissimum ad pag^{as}. 645^{tam}. 672^{dam}. (§^{o}. XVI°. *Comparaison des Arcs Elliptiques*) et 676^{tam}. Videndae quoque sunt *Observationes* Euleri *de comparatione Arcuum Curvarum irrectificabilium* a pag^{a}. 58va. usque ad 85^{tam}. in Volumine VI°. recentiorum Academiae Petropolitanae, et potissimum consulendi N^{us}. I^{us}. *De Ellipsi* (pag^{a}. 60.), II^{us}. *De Hyperbola* (pag^{a}. 65.), III^{us}. *De Curva Lemniscata* (pag^{a}. 67.), atque *De comparatione Arcuum in Ellipsi* a pag^{a}. 23^{ia}. usque ad 49^{nam}. in Volumine VII^{mo}. Adde Tomum VII^{um}. *Opusculorum etc.* Alemberti (pag^{a}. 97. et seqq.). Praeterea quanta laudum copia gratique animi significatione summi iidem Viri etiam pro aliis inventis Comitem Iulium Fagnanum gestientes quodammodo nobilitaverint in totius Italiae decus, abunde satis aperiunt nuncupatae eorum Lucubrationes, quibus antecellit Euleriana *Diatriba* de Lemniscata, qua proprietates singulae a Fagnano detectae inlustrantur, ac nova methodo promoventur. Ex nova Lemniscatae consideratione illud etiam neutiquam a Landenio neglectum

neglectum (l. c. in *Adnotatione* 114ta.), scilicet Arcus ipsius Lemniscatae, ideoque et Elasticae vel Lintteariae et Isochronae paracentricae constructionem ab unica consequi rectificatione conicae Ellipseos. (Vide praesertim *Transactionum* etc. Voluminis LXV^{ti}. Partem II^{dam}. ad Num^{um}. XXVI^{um}. in calce pag^{ae}. 289^{nae}.).

(271) Vide I^{um}. c^{um}. in *Adnotatione* 268vo. ad pag^{as}. 244. 45. ubi haec exstant verba . . . . . . *d'où les savans Geometres, que nous venons de citer, ont tiré des méthodes ingénieuses pour réduire la rectification d'un arc d'Hyperbole à un autre arc de la même Hyperbole*.

(272) Volumen Academiae Petropolitanae prae aliis memoratum in *Adnotatione* 22da., quod complectitur duo huiuscemodi Theoremata noviter demonstrata ad pag^{as}. 84^{tam}. et 87^{mam}.

(273) Perlege *Opusculorum Mathematicorum* Volumen IV^{tum}. et signanter ad pag^{am}. 280. *Supplementi* XXVI^{ae}. *Memoriae*, cui titulus exstat *Recherches de Calcul Intégral*. Supplementum autem sic inscriptum *De l'intégration de quelques quantités différentielles à une seule variable, par la rectification des Sections coniques*. Confer Opusculum II^{dum}. Riccati in II^{do}. Volumine ad pag^{am}. 86^{tam}. atque sequentes *De Formulis, quarum integratio dependet a rectificatione Ellipsis, et Hyperbolae, Disquisitio analytica*. Ceterum Alembertus Riccato ipsi succenset in *Memoria* quoque XXIII^{ia}. eiusdem Voluminis ad pag^{as}. 61. 62. de Theorematis inventione aut potius Problematis I^{mi}. resolutione, scilicet, integrationis Aequalitatis *Differentialis* $x = y\xi z + \Delta z$, supposito $z = \frac{dx}{dy}$, cuius Problematis loquuntur *Acta* Berolinensis Academiae pro anno M.DCC.XLVIII^{vo}. (pag^{a}. 275.), *Diarium Encyclopaedicum* Novembris anni M.DCC.LXVI^{ti}., ac prae omnibus *Adversaria* Scientiarum Academiae Parisiensis vertentis anni M.DCC.XL^{mi}. Miror autem Alembertum in VI^{to}. *Opusculorum* Volumine typis excuso Lutetiae Parisiorum anno M.DCC.LXXIII^{io}. ad pag^{am}. 422^{dam}. haud parum commendasse *Elementi di Matematiche del Padre Venini*, quum ab Italia profecta fuerint.

(274) *Remarque* I. ad pag^{as}. 215. 216. *Memorabilium* Academiae Scientiarum Berolinensis . . .

(275) *Adnotatio* 207ma. Quibus adde quod in *Adnotationis* 273^{iae}. calce recensui, ut rectius constet quam bene Alembertus de Calculo Integralium a prima usque aetate meruerit.

(276) Praefatio Voluminis I^{mi}. ad pag^{am}. XI^{mam}. haec habet. *Les derniers Chapitres sont un Commentaire sur l'excellent Traité de la quadrature des courbes de M. Newton. Cet Opuscule, peut-être trop negligé, renferme de grandes vues, qui ouvriroient un vaste champ a des méthodes elegantes de Calcul*.

(277) Num°. 806to. ac Pag^{a}. 231ma.

(278) Vincentius Riccatus tam in *Disquisitione Analytica*, cuius meminit Adnotatio 273^{ia}., quam in Capite XIII^{io}. *Institutionum Analyticarum* Libri I^{i}. Tomi II^{di}.; Leonardus Eulerus in Volumine VIII°. *Novorum Commentariorum Academiae Petropolitanae* ad pag^{am}. 138^{vam}.; Le Seur atque Jacquerus in Parte I^{a}. *Elementorum Calculi Integralis* ad Num^{um}. CC.XCVII^{um}. Capitis VII^{mi}. et pag^{as}. 498^{vam}. 499^{nam}.; et Andreas Iohannes Lexellius in pag^{a}. 74ta. *Additamenti etc.*, de quo loquitur 22da. *Adnotatio*. Postmodum et ipse Alembertus hanc methodum sequutus est 1°. c°. in *Nota* 265ta. ad eadeem pag^{ae}. 377^{mae}.

(279) Bougainvillius in Partis I^{ae}. Capite XVI°. Num°. CC.XXII^{do}. ac pag^{a}. 222da., et rursum in *Supplément a la premiere Partie* ad pag^{am}. XII. ac lineam 12^{am}., atque sequentes.

(280) In 1°. c°. ab *Adnotatione* 278va., et signanter ad pag^{as}. 139. 140. Consulantur insuper *Additamentum* ibibi memoratum Lexellii ad pag^{am}. 75^{tam}., atque Minimorum *Elementa etc.* praecitata in *Casu* II^{do}. Problematis VIII^{vi}. ad Num^{um}. CC.XCV., paginasque 493^{iam}. et 494^{tam}. Eulerus in Tomo VIII^{vo}. nuperrime memorato *Functiones* etiam huiusce formae $\int \frac{dx\,(A + Bx)}{\sqrt{a + \beta x + \gamma xx + \delta x^3}} =$

$\int \frac{(A + Bu)\,du}{\sqrt{(a + \beta u)(\gamma + \delta u)(\varepsilon + \zeta u)}}$ tam si *Trinomii* factores *reales*, quam si ex adverso fuerint *imaginarii*, necnon $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}}$,

$\int \frac{dx\,(P + Rxx)}{\sqrt{Ax^4 + Cx^2 + E}}$ (pag^{is}. 139. 140. 145.), et in *Conclusione* demum ad pag^{am}. 147^{am}. $\int \frac{dy\,(A + nBy + nCyy)}{\sqrt{Cy^4 + 2By^3 + Dy^2 + 2Ey + F}}$ ingeniosissime ad integrationem perduxit. Argumentum idem iam inchoatum prosecutus fuerat Alembertus in *Additions aux Recherches sur le Calcul Intégral* (21. *Juin* 1752.) ad Articulum I^{um}. ac pag^{am}. 361^{am}. Voluminis *Actorum* Berolinensis Academiae pro anno M.DCC.L^{mo}., et postea tractavit A. I. Lexellius in §°. 21mo. et pag^{a}. 76ta. ac seqq. *Additamenti* etc. Idem fecerant Riccatus et Saladinus in toto Capite XIII^{io}. Libri I^{i}. T. II^{i}. *Institutionum Analyticarum*. Idem nuperrime, noviter, et omnium acutissime De La-Grange 1°. c°. in *Adnotatione* 349na.

(281) Vide Bougainvillium in praecitato Capite XVI^{to}. ad Num^{os}. CC.XXIX., CC.XXXIII. ac pag^{as}..

ac pag^as^. 227. 229., *Acta* Berolinensis Academiae pro anno M.DCC.XLVI°. ad pag^as^. 219. 222. in Probl. IX^no^. ac XII^mo^. sive postremo, *Opusculorum* Alemberti Volumen IV^tum^. in *Supplemento*, de quo loquitur Adnotatio 273^ia^. ad Num^um^. IV^um^. etc.

(282) Formulas quoque contemplatus fuit Alembertus, veluti $\frac{du}{u\sqrt{P+Qu+Su^2+Ru^3}}$, $\frac{du}{u^n\sqrt{P+Qu+Su^2+Ru^3}}$ etc., quarum integratio arte hactenus nota ab Arcubus Sectionum Coni neutiquam impetretur. (Volumen V^um^. *Opusculorum Mathematicorum* Parisiis editum anno M.DCC.LXVIII^vo^. in Partis I^mae^. *Mémoire XXXVI. contenant quelques Ecrits sur différens sujets* ad §^um^. IV^um^., cui titulus adpositus *Sur quelques différentielles reductibles à des arcs de Sections coniques*, a pag^a^. 231^a^. usque ad 241^am^.). Vide quoque §^um^. VI^um^. (pag^a^. 637. usque ad 642.), cui titulum fecit Le Gendre *Application à d' autres exemples*, in *Dissertatione* I^ma^. pluries citata.

(283) Praeter locos iam memoratos consulantur etiam §^us^. V^us^. *Memoriae* XLIV^tae^. ac postremae eas inter, quas continet Volumen V^tum^. (*Sur des Problêmes de Calcul Intégral = Addition pour le XXVIe. Mémoire, Tome IV. des Opuscules* =) ad pag^as^. 506. 507. 508., totum Caput XVII^um^. Partis I^ae^. *Tractatus* Bougainvillii, aut, si mavis, *Troisiéme Partie des Différentielles qui se rapportent à la quadrature des Lignes du troisiéme ordre* a pag^a^. 249na. usque ad 275^tam^. Voluminis *Actorum Berolinensium* pro anno M.DCC.XLVIII^vo^. etc. Quamplurimas tandem et elegantissimas Formulas instar *Tabulae* Integralium Functionum dispositas, et ab Arcubus Ellipticis dependentes vulgavit Landenius in l°. c°. *Adnotationis* 114^tae^., nimirum anno vertente M.DCC.LXXX^mo^. Ait Le Gendre (pag^a^. 645. *Dissertationum* recensitarum in *Nota* 113^ia^.) Landenium reperisse *que tout arc d' hyperbole se rectifie immédiatement par le moyen de deux arcs d'ellipse*, deindeque (pag^a^. 683^ia^.) *Au rest, on trouve à la fin de l'Ouvrage cité de M. Landen, des tables d'intégrales plus complètes que celles qui ont paru jusqu' à present, & qui contiennent sur-tout beaucoup de formules integrées très-élégamment par des arcs d'ellipse*. Et re quidem vera, si totam desideres *Tabularum* harumce historiam et fundamentum, initium sumas necesse est ab ipsius Landenii Disquisitione *Specimen of a new method of comparing curvilineal Areas; by which many such Areas may be compared as have not yet appeared to be comparable by any other method* a pag^a^. 174. usque ad 181^am^. in Volumine LVIII^vo^. *Philosophical Transactions* pro anno M.DCC.LXVIII^vo^, ac postmodum perlegas pag^as^. 307^mam^. et 309^nam^. Voluminis LXI^mi^., quibus primum Hyperbolae Arcus nuncian-

nunciantur Ellipticorum ope rectificabiles, atque demum quaterna Theoremata, quae sunt in pag^{a}. 286ta. Voluminis LXV^{ti}. *Transactionum* earundem. Quod neque nuperrimis Alemberti meditationibus felix faustumque accidit, ut ipse fatetur in calce l^{i}. c^{i}. (*Nota* 265.) ad pag^{am}. 378^{vam}.

(284) *Commentarii* Berolinensis Academiae nuper citati in *Remarque* II. ad calcem recensitae Dissertationis. Pars I^{ma}. Bougainvillii *Tractatus* ad Num^{um}. CC.LXI. paginamque 268^{vam}.

(285) *Recherches sur différent points importans du Syſtême du Monde* (M.DCC.LIV., et LVI.) = *Partie II.* pag^{ae}. 66. quo ad Quantitatem *specie A* designatam.

(286) Prae omnibus Volumen VI^{um}. *Opusculorum*, quo agit de Telluris figura ad pag^{as}. 203. 4. 6. 7., atque alibi.

(287) Praecitatum *Opusculorum* Volumen in *Appendice* (post Memoriam LI^{am}.) *contenant quelques Additions aux Mémoires précédens*, et signanter a pag^{a}. 431^{a}. usque ad 433^{iam}. *Addition pour le L. Mémoire* in §^{o}. II^{do}. prope finem.

(288) Ea Riccati in Volumine IV°. *Collectionis Lucenſis* etc. (*Nota* 194ta.) ad pag^{as}. 76. 77. 78., et rursum in Tomo *Opusculorum* II^{do}. ad pag^{as}. 83^{iam}. 84^{tam}.

(289) Illa Euleri in pag^{a}. 134ta. VIII^{vi}. Voluminis, atque iterum in pag^{a}. 16^{a}. Voluminis X^{mi}. *Novorum Commentariorum Academiae Petropolitanae*.

(290) Tertia Lexellii in pag^{a}. 61ma. Partis I^{ae}. *Actorum Imperialis Academiae Petropolitanae* pro anno M.DCC.LXXVIII^{vo}.

(291) In §^{o}. 43^{io}. et *Adnotationibus* 194ta. ac 263^{ia}.

(292) Titulum habent *Conſideratio Formularum, quarum integratio per Arcus Sectionum Conicarum absolvi poteſt*, a pag^{a}. 129na. ad 150^{mam}. usque. (Vide insuper *Adnotationem* 22^{dam}.). Alembertus l^{o}. c^{o}. in *Adnotatione* 265ta. ex suis Formulis *Trinomialibus* casus sequentis *Tabulae* IX^{um}. et XI^{um}. iuxta Euleri ordinem feliciter derivavit.

(293) Hoc facile constabit si comparentur terna Riccati Lemmata in pag^{is}. 59. 60. 65. 69. 70. ceteraeque substitutiones, et illa praecipue ad pag^{am}. 72^{dam}. in *Opusculo* latine edito (*Nota* 288.) cum Lemmatum et Theorematum serie, quam continent pag^{ae}. 129. 130. 131. 132. 133. in prima Euleri *Diſſertatione*, et Problemate IV^{to}. ad pag^{am}. 19^{nam}., V^{o}. ad pag^{am}. 24^{tam}. atque seqq. in altera (*Adnotatio* 289.). Lexellius

xellius autem, quum Conicarum Aequationes non ad *axes*, sed ad *focos* relatas contemplatus fuerit (*Nota* 290.), substitutiones adhibuit in pag^{s}. 73^{ia}. et seqq. forma tantum *speciebusque* diversas, at eodem innixas principio.

(294) Eulerus in Volumine X^{mo}. Petropolitano ad pag^{as}. 15. 16. 34. 35. 38.; Lexellius in Tomo pariter Petropolitano, cuius meminit *Adnotatio* 290ma. ad pag^{as}. 71. 77. ac 79^{nam}.

(295) Pag^{a}. 134ta. praecitati Voluminis VIII^{vi}., pag^{is} vero 16. et 40. in Volumine X^{mo}., necnon pag^{is}. 71. 74. in Tomo altero, quod refertur ad annum M.D CC.LXXVIII^{vum}.

(296) Eodem, uti superius, ordine servato consulantur pag^{ae}. 134ta., 15. 16. 31. 38., 71. 75. 77. 79.

(297) In *Operibus*, nimirum, de quibus loquuntur *Adnotationes* 288va. 289na. 290ma. Hisce accedat nuperrima Lucubratio Ferrariensis Geometrae, cuius sermonem habui in *Adnotatione* 23^{ia}.

(298) Tomus VIII^{vus}. Academiae Petropolitanae ad pag^{as}. 134. 135., ubi tres primi *casus* deducuntur *immediate*, sub ista tamen numeratione I. II. III.; Volumen X^{um}. ad pag^{as}. 15^{tam}. et 16^{tam}.

(299) *Opusculum* italicum ad pag^{as}. 17. 18., latinum ad pag^{am}. 58.; *Differtatio* praecitata Lexellii ad pag^{am}. 69^{nam}.

(300) In Tomo X^{mo}. ad pag^{ini}. 22^{dam}.

(301) Scilicet usque ab anno M.DCC.LVII^{mo}. (Vide *Adnotationis* initium 299^{nae}.).

(302) Non tamen ante annum M.DCC.LXXVIII^{um}. (*Nota* 299.), et nomine primatuque Riccati neglecto..... *et hi quidem quatuor casus formulae nostrae differentialis modo allati ii sunt, quorum integratio nonnisi unicum arcum Sectionis Conicae, sive Ellipticum, sive Hyperbolicum, supponit*. (pag^{a}. 71.). Hoc in Volumine dum *casum* X^{um}. perlegas, errorem typographicum corrige ad pag^{am}. 82^{dam}. $n < m$ iuxta posteriorem emendationem $n > m$ in pag^{a}. sequente 83^{ia}.

(303) Volumen VIII^{vum}. Petropolitanum in l^{is}. c^{is}., ac X^{mum}. ad eandem pag^{am}. 300^{mae}. *Adnotationis*.

(304) Vide Tomum X^{um}. Petropolitanum, praesertim in Problemate 3^{io}. ad pag^{am}. 12^{mam}. Adde insuper Caput XII^{um}. Libri I^{mi}. Tomi II^{di}. *Institutionum Analyticarum* Vincentii Riccati et Hieronymi Saladini *De integratione Formulae* $dz \frac{\sqrt{f+gzz}}{\sqrt{p+qzz}}$ *per arcus ellypticos et hyperbolicos* a pag^{a}. 190ma. ad 208^{vam}.

(305)

(305) Collectio Academica praecitata in *Adnotatione* 23^{ia}. ad §^{um}. signanter 19^{num}. paginamque 760^{am}. ac 761^{am}.

(306) Consulatur §^{i}. 2us. ad pag^{am}. 59^{nam}. *Dissertationis* memoratae in *Adnotatione* 22da. pluries citata.

(307) In eàdem *Dissertatione* est Formula V^{a}. ad pag^{am}. 61^{mam}., et rursum ad pag^{am}. 69^{nam}.

(308) Locos iam recensitos reperies in *Adnotatione* 225ta. At videnda praesertim pag^{a}. 56ta. Riccatiani *Opusculi* latine editi. Hoc autem primum inventum non Riccato, sed Fagnano debetur ex demonstratis in §°. 40mo. huiusce *Exercitationis*.

(309) In Pag^{a}. 18va. *Dissertationis* suae, quam complectitur Volumen X^{um}. etc. Academiae Petropolitanae.

(310) Ad pag^{am}. 4^{am}. nuper citatae *Dissertationis*. Et iterum ad pag^{am}. 18^{vam}.

(311) In Parte I^{ma}. praedicti Voluminis Petropolitani pro anno M.DCC.LXXX^{mo}. ad pag^{as}. 90^{mae}. atque sequentium §^{um}. 28^{vum}. aliosque, qui consequuntur.

(312) *Opusculum* etc. latine editum in pag^{a}. 55ta.

(313) Confer l^{uni}. c^{um}. ad pag^{am}. eandem 18^{vam}. in *Adnotatione* 310ma.

(314) Lexellius l^{is}. c^{is}. in 311ma. *Adnotatione*.

(315) Praesertim ad pag^{am}. 11^{am}. Tomi X^{mi}. Petropolitani. (Vide *Notam* 128^{vam}.).

(316) In Pag^{is}. 34^{a}. 35^{a}. *Opusculi* etc. italice scripti. Rursum in pag^{a}. 47ma.

(317) Italicum *Opusculum* etc. ad pag^{as}. 17^{am}. ac 19^{nam}. Latinum vero ad pag^{am}. 58^{vam}.

(318) Conferantur cuncta, quae recensuimus in praemissis *Adnotationibus*, addaturque quod in latino *Opusculo* Riccatus disseruit ad pag^{am}. 59^{am}.

(319) In Pag^{is}. 19na. ac 22da. Tom. X^{mi}. Petropolitani.

(320) Eulerus in l°. c°. ad pag^{am}. 23^{iam}. Lexellius iisdem in locis, quorum meminerunt *Adnotationes* 311ma. atque 314ta. Geometrarum pene omnes Theorema celeberrimum Arearum Hyperbolae Apollonianae ad asymptoton relatae Proportionis *arithmeticae* respondentis *geometricae* Abscissarum vel Ordinatarum tribuunt Iesuitae Gregorio-a-Sancto-Vincentio. Eius equidem Propositiones CVIII^{va}. ac CIX^{na}. (p^{is}. 585. 586.) Partis IV^{tae}. Libri VI^{i}. Voluminis II^{di}. *Operis Geometrici Quadraturae Circuli etc.*) primum editae fuerunt vertente anno M.DC.XLVII°. At Aegidius Robervallius id etiam repererat in pag^{a}. 282da. Epistolae suae ad Marinum Mersennum, quae scripta ante annum M.DC.XLIV^{um}. exstat a pag^{a}. 278va. usque ad pag^{am}. 283^{iam}. Collectionis Academiae Parisiensis (*Divers Ouvrages de Mathematique & de Physique*

que etc.) praecitatae in Adnotatione 3^{ia}. Qui ergo primus invenerit in aperto non est, silentiumque circa Gallicam inventionem historiographi Montuclae tam de Robervallio, quam de Gregorio-a-Sancto-Vincentio loquentis (pag^{a}. 64ta. Tomi II^{di}. etc.) dubitationem istam haudquaquam amovet.

(321) Hoc perlege artificium in pag^{a}. 22da. Voluminis X^{mi}. Petropolitani pluries in antecessum propositi.

(322) Ita explicavi in pag^{a}. 110. et seqq. huiusce *Exercitationis*.

(323) Paginam consule 90^{mam}. Ceterum nec de *variabilis* limitibus in qualibet *Tabulae* Functione, nec de singularibus adfectionibus aliis agendum censeo, quum haec omnia notissima sint (vide *Conclusionem* Euleri ad pag^{im}. 50^{am}. Voluminis X^{mi}. etc.), et a praesenti meo munere aliena. *Tabulae* insuper omnes a me hucusque exhibitae in paginis 115. 124. 125. 138. 139. 154. et 155., tametsi praeter Arcus Ellipsium illos quoque contineant Hyperbolarum, reapse per recentiorum inventa, ac praesertim Landenii et Le Gendre, unicis Ellipticis Arcubus in subsidium vocatis confici poterant. (Vide *Notas* 114. 270. 283. 344). At veterem stilum prosequi ad *casuum* omnium distributionem necesse habebam in hac *Exercitatione*, cuius caput et argumentum erat sola inlustratio doctrinae Pascalii.

(324) Vide *Adnotationem* 23^{iam}.

(325) In *Opusculo* italice scripto ad pag^{as}. 57. 59. 63. 67. 72. 73. 74. Latinum vero eadem habet a pag^{a}. 75^{a}. usque ad 83^{iam}. *Differtatio* Malfatti ad §^{um}. 24^{tum}. in pag^{a}. 763^{ia}.

(326) Malfattus I^{o}. c^{o}., sed praesertim ad pag^{am}. 750^{mam}. et §^{um}. 3^{ium}.

(327) Sectiones etenim Conicas ipse etiam consideraverat *trigonometrice*, sed ad *focos* relatas, nec Cosinubus *analogis* Hyperbolae introductis, prouti fecit Malfattus (pag^{a}. 756. §. 11.), duosque tantummodo Arcus in *casibus* difficilioribus, nimirum, iuxta eius numerationem I^{o}. III^{io}. IX^{no}. ac X^{mo}. ad pag^{as}. 81. 82. praeter Quantitatem Algebraicam obtinuerat.

(328) Nam inter alios Scriptores Lexellium memorat ad pag^{am}. 750^{mam}. Numerumque 2^{dum}.

(329) Volumen istud impressum fuit [*Nota* (22)] anno M.DCC.LXIII^{io}., illud autem praedictum *Societatis Italicae* anno M.DCC.LXXXIV°. ut alibi admonui.

(330) Consule pag^{as}. 138. 139. huiusce *Exercitationis*, numerosque adpositos Eulerianos cave ne confundas cum illis, quos hic recensendos curavi. Nam in *Tabula* transcripti sunt a Volumine X^{mo}. *Academiae Petropolitanae*, ii vero nunc memorati a pag^{is}. 136. 37. VIII^{vi}. Voluminis.

(331) Eulerus anno M.DCC.LXI^{mo}., Riccatus M.DCC.LVII^{mo}. (Vide 23^{dam}. et 154^{tam}. *Adnotationes*).

(332).

(332) Id constat ex numerorum *Tabulae* comparatione, quae in pag^{is}. exstat 124. 125. huiusce *Exercitationis*, ad hoc tantummodo statuendum, scilicet, quinam Euleri numeris numeri Riccatiani respondeant.

(333) *Lemmata* in pag^{is}. 129. 130., *Theoremata* in 131. 132. 133, *Theorema singulare* in 133. praelaudatae *Dissertationis*. Malfatti *Disquisitio* ad pag^{as}. 761^{mam}. et 762^{dam}. (§. 21.) etc. in *Lemmate* I°. Secundum enim ac tertium sunt Riccatiana (pag^{is}. 762da. ac 763^{ia}. §§. 22. 23.), ut Malfattus ipse fatetur in §°. 23^{io}.

(334) Volumen II^{um}. *Opusculorum ad res Physicas et Mathematicas pertinentium* a pag^{a}. 120ma. usque ad 134^{tam}. habet Epistolam Bononiae scriptam XII. Kal. Nov. Pio Fantono Sancti Petronii Canonico, in qua et de Fagnani methodo dimensionis perimetri *Lemniscatae* et de *integratione* disseritur *Functionis differentialis* $\frac{z^t\,dz}{a^{t-2}\sqrt{a^4-z^4}}$ in hypothesi t numeri paris positivi vel negativi. Hac in Epistola praesertim consule pag^{as}. 121^{am}. ac 122^{dam}., ubi de Quadrante loquitur *Lemniscatae*, artemque perhibet effugiendi Crus Hyperbolicum *infinitum* (*Nota* 269na.). Quibusdam autem in casibus *Integralia*, quae generaliter a Conicarum *arcubus* pendent, simul combinata vel *integrationem* recipiunt, vel saltem ad simplicius adtinent geous magnitudinum *transcendentium*. Praeclarum habes exemplum in nova Elasticae proprietate, quam detexit Eulerus (§. 14. pag^{a}. 11. *De productis ex infinitis factoribus ortis* in T°. XI^{mo}. *Actorum veterum Petropolitanorum*), scilicet, $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\Pi}{4}$ dum $x=1$, aut Rectangulum ex Arcu *Elasticae* in Applicatam Abscissae 1 respondentem Aream Circuli petaequare, cuius diameter sit eadem Abscissa. (Vide insuper Volumen VII^{um}. *Miscellaneorum Berolinensium* ad pag^{am}. 129^{nam}.).

(335) Prior Ioanni Francisco Malfatto Bononiae data III. Idus Quintilis exstat in eodem II°. Volumine a pag^{a}. 134ta. ad pag^{am}. usque 146^{tam}. agitque de eâdem superiori Functione integranda. Sed de argumento, in quo sumus, vide potissimum pag^{as}. 136^{tam}. ac 138^{vam}.

(336) Altera Iordano Comiti Riccato, Fratri carissimo, data Bononiae pridie Nonas Ianuarii Functionem praecipue versat $\int\frac{dx\sqrt{a+x}}{2\sqrt{x}(b+x)^{\frac{3}{2}}}$, sive, post substitutionem τῆς $x=\frac{z^2}{a}$ et multiplicationem per $b\sqrt{b}$, Functionis $\frac{b\sqrt{ab}\cdot dz\sqrt{a^2+z^2}}{(ab+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ summandae

dae methodum tribuit, pag^{as}. implet a 146ta. ad 163^{tium}., et artificium, cuius hic sermo factus, praebet in pag^{a}. 159na.

(337) *Mémoire* XXXVI^{a}. §. IV°. a pag^{a}. 241^{a}. usque ad 246^{tam}. *Opusculorum* Voluminis praecitati, et signanter in Numeris 12. 13. 14. 15. 16. *Mélanges etc. a Turin, de l'Imprimerie Royale* a pag^{a}. 151ma. usque ad 162^{dam}. in §^{o}. 4to.

(338) Alemberti methodus ingeniosissima valde praestat alteri a Riccato adhibitae. Prioris specimen tradidi in §^{o}. 46to. ad pag^{am}. 151^{am}. Veruntamen usque ab anno M.DCC.LXXI^{mo}., scilicet multo ante Malfatti *Dissertationem*, de qua nunc loquimur, hoc idem tractaverat argumentum, usus tantummodo *Functionibus* finitis, Ioannes Landenius in Volumine LXI^{mo}. *Transactionum Philosophicarum* ad Num^{um}. XXXVI^{tum}. et a pag^{a}. 298va. ad 310^{niam}. Totus enim est ipse Landenius in demonstrando (ac praecipue ad Num^{um}. 5um. paginasque 301. 302.) qua via pervestigetur *limes* differentiae inter Arcum Hyperbolae eiusque Tangentem semel atque *contactus* ad *infinitam* a centro ac vertice Curvae distantiam progressus fuerit. (*A Disquisition concerning certain Fluents, which are assignable by the Arcs of the Conic Sections; wherein are investigated some new and useful Theorems for computing such Fluents*). Hoc autem modo scopulum illum amovere potis fuit, quem offendebant communes methodi traditae a Maclaurino et Alemberto. (Vide etiam *Notam* 344^{tam}.).

(339) Vide pag^{as}. 760^{am}. ac 775^{tam}. (§§. 18. ac 39.) II^{dae}. Partis Voluminis *Memorabilium Societatis Italicae* nuper recensiti in *Adnotatione* 329na.

(340) *Summarium Dissertationum* inter *Mathematica* ad Num^{um}. V^{um}., et signanter ad eius N^{i}. calcem pag^{is}. 22. et 23. respondentem. „ Interim laudi ac dignitati huius„ modi investigationum nihil detrahetur, si observaverimus, nunc quidem in cal„ culi applicatione ad praxin neque curvarum quadraturam, neque rectificationem „ magnopere desiderari, cum omnia multo facilius et accuratius per methodos ap„ propinquandi expediri queant „. (Vide etiam *M^{r}. John Landen Observations on converging Series* M.DCC.LXXXI.).

(341) Pars I^{a}. Sectio I^{a}. etc. In Capite praesertim II^{do}., quod sic inscribitur *De integratione Formularum irrationalium*, eas tantummodo versat Formulas cl. Auctor, quae ad rationalitatem analytico quodam artificio reduci possint. De ceteris autem omnibus ita loquitur. „ Si Xdx fuerit eiusmodi formula differentialis, quae nullo pacto „ ad rationalitatem reduci queat, eius integrale $\int Xdx$ ad novum genus functio„ num transcendentium erit referendum, in quo nihil aliud nobis relinquitur, „ nisi ut eius valorem vero proxime assignare conemur „. Silentium idem invenies de iisdem Formulis ab Arcubus Sectionum Conicarum dependentibus in *Additamento* (pag^{is}. 85. 86.) ad praecitatum Caput II^{um}.

(34[illegible])

(342) Revera Caput III^{um}. *Institutionum etc.* Sectionis I^{ae}. Partis I^{ae}. agit *de integratione formularum differentialium per series infinitas* (pag^{a}. 87. et seqq.), eodemque innititur fundamento etiam Caput VIII^{um}. Sectionis ipsius ad pag^{am}. 230. ac seqq. *De valoribus integralium, quos certis tantum casibus recipiunt*.

(343) Error irrepsit, fortasse typographicus, in pag^{a}. 753^{ia}. ad §^{um}. 9^{num}. τῷ φ Circumferentiae aequalis dum Radius $= 1$, vice Semicircumferentiae ut in pag^{a}. 159na. ad §^{um}. 17^{mum}., aut si velis Circumferentiae, sed posita Diametro $= 1$, veluti Π penes Eulerum in Capite V^{o}. *De integratione formularum angulos sinusve angulorum implicantium* Sectionis I^{ae}. Partis I^{ae}. praecitatarum *Institutionum*. Totus hic Euleri labor, nunquam satis laudandus, innititur ingeniosissima *Dissertatione*, cui titulum fecit *Subsidium Calculi Sinuum* a pag^{a}. 164ta. usque ad 205^{tam}. Voluminis V^{ti}. Petropolitani inter recentiora pro annis M.DCC LIV^{to}. et LV^{to}. (editionis M.DCC.LX.).

(344) Est in linea 6^{a}. ac 7ma. pag^{ae}. 233^{iae}. l^{i}. c^{i}. Inlustrationem perquam maximam huiusce Theorices videre licet in *Dissertationibus* nuperrimis Le Gendre (*Nota* 113^{ia}.), et signanter ad pag^{as}. 635^{tam}., et 679^{nam}. ubi non modo Series perhibetur infinita pro *differentia* ista statuenda Hyperbolicam inter Curvam eiusque Asymptoton, verum etiam in casu Hyperbolae aequilaterae *differentia* eadem proxime exprimitur per 0,5992 etc. aut $\frac{3}{5}$ Semiaxis, atque universaliter illam ab Ellipseos et Circuli Arcu dependere in eâdem hypothesi ostenditur, dummodo Ellipsis conica sit eius *speciei*, quam in *Adnotatione* 159na. sum contemplatus. *On retrouve cette même Ellipse* dont l'excentricité est égale au demi-axe coniugué *dans la rectification de l'Hyperbole équilatere, & il est clair par conséquent que la différence de l'asymptote à la courbe ne dépend alors que d'une Ellipse & du Cercle*. Dum autem Hyperbola *scalena* fuerit *differentiam L* statuit Landenius (pag^{a}. 285^{a}. l^{i}. c^{i}.) $= 2F - E$, positis E, F *datarum* Ellipsium quadrantibus.

(345) L^{o}. c^{o}. ad pag^{am}. 231^{am}. in lineis 18^{a}. ac 19na. *Dissertatio* Malfatti duobus in l^{is}., scilicet, §§^{is}. 9no. ac 39no. paginisque 754ta. et 775ta.

(346) Consulatur *Adnotatio* 113^{ia}.

(347) Argumentum istud ab Eulero peragi incoeptum in veteri Volumine VIII^{vo}. pro anno M.DCC.XXXVI^{to}. (editionis M.DCC.XLI.), et signanter in *Dissertatione* a pag^{a}. 86ta. usque ad 99^{nem}. ita inscripta *Solutio Problematum rectificationem Ellipsis requirentium*. Exinde in Tomo II°. *Novorum Commentariorum* alias citato nata est *Dissertatio* altera *De reductione Linearum curvarum ad Arcus circulares* a pag^{a}. 3^{ia}. usque ad 39^{num}. At pro Ellipsi consulenda praesertim erunt Problema 4um.

4um. (pag. 22.), Exemplum 1um. (pag. 26.), 2^{dum}. (pag. 27. 28. 29.), ac denique 3^{ium}. (pag. 29. 30. 31.). (Vide §^{um}. 9um. ac 26^{tum}. huius *Exercitationis*).

(348) Id equidem Eulerus ipse paraverat in Volumine VII^{mo}. vel Continuatione VI^{ta}. *Miscellaneorum etc.* typis excusa vertente anno M.DCC.XLIII^{io}., ubi auctor eximius ad Num^{um}. III^{ium}. et pag^{am}. 129^{am}. ac seqq. egit primum *De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur*. Istam fusius promovit theoricen a pag^{a}. 156ta. ad 178^{vam}. Voluminis II^{di}. *Mélanges etc. de Turin*, ubi exstant *Observationes circa Integralia Formularum* $\int x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$ *posito post integrationem* $x = 1$. *Auctore L. Eulero*. Huic inventioni referri quodammodo possunt Integralia *Functionum* adparenter *imaginariarum*, quas recensui in calce *Notae* 138^{vae}. Iterum de conica Ellipsi quasdam ad rem astronomicam promovendam Infinitas Series exposuit in Volumine eiusdem Berolinensis Academiae pro Anno M.DCC.XLVI^{to}. sub titulo *Mémoire sur la plus grande Equation des Planetes* a pag^{a}. 224ta. usque ad 249^{nam}. Legendum praeterea Euleri ipsius Commentarium *Elémens de la Trigonometrie Spheroïdique etc.* in *Actis* Berolinensibus anni M.DCC.LIII^{ii}. a pag^{a}. 258va. ad 294^{tam}., quod varias complectitur Formulas pro Ellipticis rectificandis Arcubus ab illis Circuli paululum aberrantibus.

(349) Auctor huic Tomo secundo titulum fecit *Conjectura Physica circa propagationem soni ac luminis, una cum aliis Dissertationibus Analyticis De Numeris amicabilibus, De natura Aequationum, ac De rectificatione Ellipsis = Auctore Leonardo Eulero =*. Tertium autem post *Coniecturam Physicam etc.* Opusculorum ita inscriptum legitur *Animadversiones in rectificationem Ellipsis* a pag^{a}. 121ma. usque ad 167^{mam}. At praesertim consulendum *Problema* ad §^{um}. X^{um}. et pag^{am}. 125^{am}. *Ex datis semiaxibus Quadrantis Elliptici per seriem infinitam definire longitudinem Arcus Quadrantis*, quae Series legitur in pag^{is}. 128va. ac 129na. Rursum in §^{o}. LXI°. alterum exstat praxi idoneum Problema *Datis axibus coniugatis Ellipsis, in numeris proxime exhibere eius perimetrum* (pag. 165. 166.). Elegans etiam est ad pag^{am}. 161^{am}. §^{us}. LVII^{us}., quo Arcus Elliptici Parabolicis comparantur. Volumen I^{um}. sub titulo *L. Euleri Opuscula varii argumenti* Berolini impressum anno M.DCC.XLVI°., postremum autem anno M.DCC.LI^{mo}. *L. Euleri Opusculorum Tomus III.* At prae omnibus legenda est *Dissertatio* nuperrima praestantissimi De La Grange, quam scripsit Berolini sub diem 25^{tam}. Iunii M.DCC.LXXXV., tituloque adposito *Sur une nouvelle méthode de Calcul Intégral pour les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré* edidit in *Memorabilibus* Academiae Taurinensis (a pag^{a}. 218. ad 291.) pro annis M.DCC.LXXXIV°. et LXXXV°. (*seconde Partie*)

tie), Augustae-Taurinorum impressis vertente anno M.DCC.LXXXVI^{to}. Praesertim autem in succum et sanguinem vertendae sunt Series (pag^{a}. 251. et seqq.), quibus titulus adest *Rectification de l'Ellipse, & de l'Hyperbole*.

(350) Partis I^{ae}. Sectionis I^{ae}., cuius titulus *De integratione Formularum differentialium*, Liber I^{us}. in Capite VIII^{vo}. *De valoribus Integralium, quos certis tantum casibus recipiunt* ad pag^{am}. 235^{am}., et signanter in Exemplo II^{do}. Numeri 338^{vi}. (Vide *Notas* 342. et 348.).

(351) Quo ad epocham editionis Britannicae vide *Adnotationem* 19^{nam}., quo ad locum versionis Gallicae 345^{tam}.

(352) In Euleriano $\int dx \sqrt{\frac{1+a'xx}{1-xx}}$, *unde peripheriam Ellipsis cognoscere licet*, est $a' =$ Quadrato *excentricitatis* Ellipseos ad Semiaxem minorem 1 relatae (vide *Adnotationem* 148^{vam}.), veluti k^2 in Formula Maclaurini ex Num^{o}. 805to. ad lineam 17^{mam}. pag^{ae}. 230^{mae}., eâdem etiam in Formularum comparatione hypothesi facta $\tau\tilde{\imath}$ $a=1$.

(353) In Pag^{a}. 396ta. mei Operis *Magnitudinum Exponentialium* etc. (vide *Adnotationem* 13^{iam}. *Antelogii*). Demonstratio inibi petitur ab Algebra Cartesiana. Primus omnium ad id ostendendum Analysin *differentialium* infinite-parvorum adhibuit Leonardus Eulerus in *Opusculorum varii argumenti* II^{do}. ad Num^{um}. XXI^{um}. paginamque 133^{iam}. et seqq. (*Adnotatio* 348va.), sed prolixis admodum et implicatis computationibus.

(354) *Theoria nova Magnitudinum Exponentialium etc.* ad §^{um}. 278^{vum}. in pag^{a}. 380ma.

SECTIO III^{ia}. (355) Ne de posterioribus loquar additamentis Leonardi Euleri atque Hieronymi Saladini consulatur *Diarium Eruditorum Lipsiense* Mensis Augusti pro Anno M.DCC. XXIV°. (pag^{a}. 356^{a}.), sive Iohannis Bernoullii *Operum* Volumen II^{um}. in Num^{o}. C.XXXII^{do}. (*Methodus commoda et naturalis reducendi quadraturas transcendentes cuiusvis gradus ad longitudines Curvarum Algebraicarum*) a pag^{a}. 582da. ad pag^{am}. 593^{iam}. Quaedam huc etiam ducentia Viri cl. Abbas Suzzius et Ludovicus a Ripa recensuerunt in *Miscellaneis etc.* (Vide quoque Iacobum Hermannum in *Actis Lipsiensibus* Aprilis M.DCC.XXIII.). Minus feliciter id etiam molitus fuit Guido Grandus in *Appendice* II^{a}. *De methodo transformandi Curvas tum superficies tum lineas in alias diversae speciei, idque infinitis modis* a pag^{a}. 93^{ia}. ad 140^{mam}. 2^{ae}. editionis *De Quadratura Circuli et Hyperbolae*).

(356) *Rectos* intelligo Cylindros; speciesque Cylindrorum enumeratae *casus* omnes complectuntur Integralium aut algebraicorum, aut a quadratura Hyperbolae, aut

Circuli

Circuli dependentium tam in Functionibus *rationalibus*, quam in *irrationalibus*, quae ad *rationalitatem* perducantur. (Vide prae ceteris excellentissimum Caput II^{um}. *De integratione Formularum irrationalium* Sectionis I^{ae}. Partis I^{ae}. *Institutionum Calculi Integr.lis* Euleri).

(357) Dummodo *constans B* non evanescat (pag 59. et 60. *Capitis* nuper citati). Quum autem ex recentioribus inventis Le Geodre (*Adnotationes* 113. et 114.) rectificatio Hyperbolae ab illa Ellipsews derivetur ope *differentiae partialis* Elliptici Arcus, sive quantitatis *transcendentis* $\int d\phi\, (\sqrt{1 - c^2 Cos^2.\,\phi})$, in qua *varietur* tantummodo excentricitas c (*Nota* 148.), nemo non videt id omne perfici tam pro *Functionibus rationalibus* quam pro *irrationalibus* in II^{da}. *Sectione* animadversis, aliisque cunctis a Landenii *Tabula* nuperrima comprehensis (*Adnotatio* 283^{ia}. sub finem), si ab unico Cylindro Elliptico latissime considerato auxilium petatur. Nam Parabolicus etiam Cylinder est *limes* Ellipticorum. (Torricellius in MS. Musei Florentini = *Parabolae infinitae* =). (Identidem in Opusculo Thomae Cevae = *De Parabolis ad modum Ellipsium considerandis* =).

(358) Sectio II^{da}. Partis I^{ae}., ad Caput V^{um}. *De comparatione quantitatum trantcendentium contentarum in forma* $\int \frac{P dx}{\sqrt{A + 2Bx + Cxx}}$ ad pag^{am}. 421. et seqq., ac Caput VI^{um}. *De comparatione quantitatum transcendentium contentarum in forma* $\int \frac{P dz}{\sqrt{A + 2Bz + Czz + 2Dz^3 + Ez^4}}$ ad pag^{am}. 451. et seqq., in quarum alterutra Functio P est *rationalis*. Adde quod ipsemet Eulerus doctissime exposuit de Integrali Algebraico Aequationis $\frac{\mu dx}{\sqrt{x + x^3}} = \frac{\nu dy}{\sqrt{y + y^3}}$ in *Commentariis Berolinensibus* pro anoo M.DCC.LX^{mo}., editis tamen vertente aono M.DCC.LXVII^{mo}., ad pag^{am}. 242^{dam}. atque sequentes.

(359) *Cousin Leçons &c.* 2de. *Partie* pluribus in l^{s}.; Volumen VI^{um}. Petropolitanum pro annis M.DCC.LVI° ac LVII^{mo}. (editionis M.DCC.LXI.) ad pag^{am}. 37^{am}. in *Dissertatione* sic inscripta *De integratione Aequationis differentialis* $\frac{m dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{n dy}{.\sqrt{1 - y^4}}$; Volumen VII^{um}. pro annis M.DCC.LVIII^{vo}. ac LIX^{no}. (editionis ut supra) in *Dissertatione*, cuius titulus est ad pag^{am}. 3^{iam}. *Specimen alterum methodi novae quantitates transcendentes inter se comparandi*; et *Acta Academica* praecitata in Parte priori (editionis M.DCC.LXXX.) ad pag^{am}. 20^{am}., ubi exstant usque ad 58^{vam}. *Dilucidationes super methodo elegantissima, qua illustris De La Grange usus est in integranda Aequatione differentiali* $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$. Accedant etiam *Dissertationes* pul-

 cherrimae

cherrimae eiusdem Euleri de hoc ipso argumento in Volumine XII^{mo}. Petropolitano pro annis M.DCC.LXVI^{to}. ac LXVII^{mo}. (editionis M.DCC.LXVIII.), quarum prima a pag^{a}. 3^{ia}. ad 17^{am}. est *Integratio Aequationis* $\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4}}$, secunda vero a pag^{a}. 42da. usque ad 87^{mam}. *Evolutio generalior Formularum comparationi Curvarum inservientium*.

(360) *Mélanges de Philosophie & de Mathématique &c. pour les années* 1766. — 1769. a pag^{a}. 98va. usque ad 126^{tam}., quibus legitur Dissertatio *Sur l'integration de quelques équations différentielles dont les Indéterminées sont séparées, mais dont chaque membre en particulier n'est point intégrable* = *Par M. De La Grange* = *a Berlin ce* 20. *Septembre* 1768. =.

(361) Consule Bougainvillium in Capite XVI^{to}. Partis I^{ae}. etc., at praesertim ad Numeros CC.XXIX^{num}. ac CC.XXXIII^{ium}. praeter CCXIII^{ium}. Capitis XV^{ti}., vel Problema 4um. ad pag^{am}. 205^{tam}. et 12um. ad pag^{am}. 222^{dam}. Voluminis praecitati Berolinensis Academiae pro anno M.DCC.XLVI^{to}.

(362) Volumen VIII^{vum}. inter *nova* Petropolitanae Scientiarum Academiae ad pag^{am}. 139^{nam}. in Formula numeri 6^{ti}.

(363) Volumen X^{um}. *novorum* Commentariorum Academiae Petropolitanae in Problemate 4to. ad pag^{am}. 19^{nam}.

(364) Pars I^{ma}. *Opusculorum Mathematicorum* Voluminis V^{ti}. ad §§^{os}. 13^{ium}. ac 14um. in pag^{a}. 242da.

(365) Vide I^{um}. Alemberti citatum ad pag^{am}. 245^{tam}., Vincentii Riccati *Opusculorum etc.* Volumen II^{dum}. in Lemmatum 1°. ac 2do. ad pag^{as}. 59. 60. 65. vel *Opusculum* Italicum ad pag^{as}. 20. 31., Volumen VIII^{vum}. Petropolitanum pro annis M.DCC.LX^{mo}. ac LXI^{mo}. (editionis M.DCC.LXIII.) ad pag^{ae}. 133^{iae}. calcem in *Theoremate singulari*.

(366) Consulatur *Adnotatio* 209na. sub finem.

(367) Bougainvillius in Partis I^{ae}. etc. toto Capite XVII^{mo}. sic inscripto *Des différentielles dont l'intégration dépend de la quadrature des courbes du troisième ordre* ad pag^{am}. 234^{tam}. Corrigendus autem error *des courbes*, scribendumque *des lignes*.

(368) *Adnotatio* 282da. Perlege I^{um}. ibidem citatum a pag^{a}. 231ma. usque ad semissem pag^{ae}. 241^{mae}. Adde etiam Formulam, uti in *Nota* praedicta,

$$\int \frac{dx}{x^n \sqrt{P + Qx + Sx^2 + Rx^3}}.$$

(369) Pars I^{a}. *Tractatus* Bougainvillii in Lemmate, quod exstat pag^{a}. 237^{a}. ac Num^{o}. CC.

CC.XL^{mo}. Idem in Theoremate I°. ad pag^{am}. 246^{am}. numerumque CC.XLIV^{tum}.

(370) Caput XIX^{um}. Partis I^{ae}, eiusdem Bougainvillii *Tractatus*.

(371) Opera notissima sunt, praeter Volumen II^{um}. *Introductionis in Analysin Infinitorum* anno M.DCC.XLVIII^{vo}. evulgatum, quae iam memoravi in *Adnotationibus* 33^{ia}. *Antelogii*, et *Exercitationis* 92da. 135ta. ac 182da. *Enumeratio* Newtoni *Linearum III^{ii}. ordinis*, omnium huiuscemodi speculationum prima, in lucem edita fuit vertente anno, cuius mentio facta sub initium §^{i}. 49^{ni}.

(372) *Quatre Problemes sur de nouvelles Courbes de M^{r}. Alexis Clairaut le Fils*. Huius Dissertationis in calce fides exstat Academicorum ex autographo transcripta, nec modo Annum M.DCC.XXVI^{um}., sed etiam primam Septembris diem procul dubio definiens, qua impuber ille inventionem suam dedicabat Scientiarum Academiae Parisiensi. Harumce Linearum unam, scilicet I^{am}., iam praeoccupaverat Guido Grandus in *Hugenianis* impressis anno M.DCC.I^{mo}. et signanter ad pag^{am}. 197^{am}. in *Epistola Geometrica ad Thomam Cevam* Iesuitam. *Tractatum* „ De novis Lineis curvis „ pleniorem idem Grandus pollicitus fuerat usque ab anno M.DCC.X^{mo}. (Vide 2^{dam}. editionem *Quadraturae Circuli et Hyperbolae* ad pag^{am}. 105^{tam}.).

(373) In *Elogio* Clairautii, quod est in *Historiae Academiae Scientiarum Parisiensis* Volumine ad annum relato M.DCC.LXV^{um}., preli fortasse vitio *Miscellanea Berolinensia* anni M.DCC.XXIV^{ti}. citantur. Narrat idem *Elogii* scriptor Clairautium ipsum sextumdecimum aetatis annum agentem complevisse etiam Tractatum *Recherches sur les Courbes a double courbure;* quod ad unguem consonat cum adprobationibus initio Opusculi praemissis editionis anni M.DCC.XXXI^{mi}.

(374) Huius Curvae Aequationem, Figuramque Apollonii Hyperbolam imitantem ($x^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$) reperies quoque, sed obiter animadversam, in Tomo II^{do}. ad pag^{am}. 390^{mam}. *Cours de Mathématiques* Abbatis Bossuti editionis Parisinae anni M.DCC.LXXXI^{mi}.

(375) Fundamento hoc simplicissimo innititur omnis Conicarum Sectionum doctrina. Specimen istius argumenti typis paratum habeo in Collectionum Academicarum usum sub titulo *Saggio d' un nuovo metodo per dimostrare le proprietà delle Sezioni Coniche*.

(376) De *Tabula* loquor, quae exstat in pag^{is}. 154ta. et 155ta.

(377) Quam praestiterit ob inventorum copiam, pretium, et elegantiam Torricellius Viviano, nemo prae Viviano ipsomet magis, si recte iudico, demonstravit. Iterum iterumque iubentibus Ferdinando II^{do}. ac Leopoldo ab Etruria, semel ac bis instante Ludovico Francisci Serenai Metropolitanae Florentinae sacrarum Aedium Administrationis Tabellario, et Torricellii Assis ac praesertim MSS^{tum}., ut publicam

cam cito viderent lucem, ex testamento curatore renunciato, nunquam Vivianus voto cessit, nunquam fidem promissis liberavit, nunquam passus est ut typis parata eius Geometrae maximi ANEKΔOTA omnium expectationi facerent satis. Utrum maioris famae Torricellii suspicio, aut perantiqua aemulationis imparis oborta recordatio quum divini Galilaei familiaritate atque consuetudine simul cum Torricellio frueretur in Martellinorum Rure ad D. Matthaei Suburbanum, Viviani animum occupaverit, fusius in *Perellianis* meis coniectabo. Interim legenda est Epistola ad Ioannem Lamium, Florentiae scripta sub diem 18vam. Septembris vertentis anni M.DCC.Lmi., et in *Novis Literariis* Florentinis inserta ad Numum. 38vum., ac praecipue in loco *Necessario sarebbe che informassi ec.* De Serenaio, rerum praesertim astrologicarum amantissimo, plura inveni in Codice chartaceo *Filza di Giustificatione XV. nella Cancelleria dell' Opera*, ac de illius itinere in Romandiolam Torricelliorum Patriam anno M.DC.XXXVIImo. quum Administrationis antea dictae Praefectus esset Senator amplissimus Alexander Ioannis Caccini, Curatorque Baccius Lapi De Tovaglia (N°. 155. pag'. 209. l'. c'.); de summo autem Serenai eiusdem studio molestiaque perpessa a die 29na. Iulii M.DC.LI. usque ad 27am. Novembris M.DC.LXX. ut Vivianum, morae fastidiosissimae accusatum, quoad poterat excitaret, in MS. percelebri Palatino.

(378) Vixdum Aegidius Robervallius inventi Torricelliani nuncium accepit, demonstrationem suam Marino Mersenno illico communicavit. (Vide Epistolam citatam in *Adnotatione* 320ma. ad pagam. 279nam. atque seqq., quibus demonstratio illa continetur, summisque laudibus a Geometra Gallo Torricellius idem extollitur). Quod non alia de caussa hic iuverit monuisse, nisi ad emendandum errorem Elogiographi Torricellii ad pagam. 435tam. (l. c. in *Nota* 11ma.), ubi ait *Torricelli ne avea date due dimostrazioni. Roberval ne aggiunse un' altra diversa, che si è perduta*. Nam demonstratio ibi exstat, quam deperditam dixit.

(379) *Exercitationes Geometricae sex = Auctore F. Bonaventura Cavalerio = Bononiae M.DC.XLVII.* in Exercitatione VIta. *De quibusdam propositionibus miscellaneis* ad pagam. 536tam. *De Solido infinite longo aequali finito*, nempe ad Propositionem XXXVIIIvam. eiusque Scholium. Cavalerius minime adnotavit Curvam suam esse Hyperbolam Apollonii, et quidem *aequilateram*, quod tamen ex illius generatione ab ipso tradita liquido constat, quum *hyperbolismus* sit Lineae-rectae. Hodienum cum Fontenellio (*Histoire de l'Académie Royale des Sciences &c.* M.DCC.XI. ad pagas. 61. 62.) dicendum *merveilles dont on ne daigne plus presentement s' etonner*, quà Bomii reperta (*sur la Tractrice*) (paga. 58. etc.), scilicet et de Area infinite-longa Quadranti Circuli tangentem Curvae pro Radio habentis, et de Solido pariter infinite-longo Quadranti Sphaerae eiusdem Radii aequali, fortasse primus recensuit. Hic autem de *falsa* illa loquor *Tractrice*, quam Geometrae primitus animadverterant, haudqua-

haudquaquam de *veris Tractricibus* ab Eulero amplissime recensitis in II^{do}. Volumine *novorum Actorum Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae* edito vertente anno M.DCC.LXXXVIII^{vo}. (*Deux Mémoires concernant une espece de Ligne courbe appellée Tractrix*).

(380) In rei mathematicae Fastis celeberrima fuit olim Formula $A\left(\frac{r+x}{r}\right)^2 \times E^{\frac{-frx}{A(r+x)}}$, quae in casu τῷ $x = -r$ dum ex natura Problematis Physici, ad quod pertinebat, infinitum valorem consequi debuisset, abire in nihilum $\left(A\left(\frac{o}{r}\right)^2 . E^{\frac{fr^2}{A.o}}\right)$ videbatur, aut potius in expressionem vagam o. ∞ finitae magnitudinis, sed indeterminatae, atque Calculo inutilis, nodumque paene insolubilem obiiciebat. Veruntamen illa Functio rite recteque perpensa nulli *paradoxo* locum linquit, proptereaquod $A\left(\frac{o}{r}\right)^2 . E^{\frac{fr^2}{A.o}} = A.o^2.E^{n.\infty}$ ex regulis Analyseos elementaribus est reapse *Infinitum*. Passim exstant exempla similia et in hac *Exercitatione* et in IV°. potissimum Capite *Theoriae novae Magnitudinum Exponentialium etc.* (Consulatur *Saggiu Analitico delle altezze barometriche* in lucem editum (ni fallor) anno M.DCC.LXXI^{mo}., praesertim ad pag^{as}. 58. 59. 66. 67. et 68.).

(381) Ad Num^{um}. XIX^{um}., quem continent pag^{ae}. XXXIV^{ta}. ac XXXV^{ta}. (Vide Torricellii *Opera* edita anno M.DC.XLIV^{to}. ad pag^{am}. 117^{am}. numerationis 2^{dae}., et MS. Palatinum eius *Anecdotum* ad Num^{um}. rubrum 42.).

(382) Asymptotae Hyperbolarum *similium* sunt in proportione Axium vel Parametrorum. Si Circuli Ordinata super Diametrum 1 evanescat, erit 1 : o : o ∺. Eadem recurrunt in Systemate Circulorum innumerorum, quorum Circumferentiae eodem in puncto sese tetigerint, quae symbolum sunt adfectionum Hyperbolae conicae eiusque Asymptotae etc. etc. (Consulantur prae ceteris *Opere di Oronzio Fineo del Delfinato, tradotte da Cosimo Bartoli ed Ercole Bottrigaro etc. = in Venetia* M.D.LVII. =, et signanter prope finem ubi titulus exstat *Vantaggi delle cose sopradette*). Silentio praetereundum non est Aream Hyperbolae-circuli aut *aequilaterae* aut *scalenae* zonis suis analogiam quoque servare cum zonis Sphaericae Superficiei a *genitore* Circulo genitae, eandemque analogiam in Quadratrice Dinostrati repositam esse.

(383) Legatur *Appendix* Tomi citati ad pag^{as}. 423^{iam}. et 424^{tam}.

(384) In pag. 276ta. *Artis coniectandi* editionis Basileensis anni M.DCC.XIII^{ii}. a Nicolao Bernoullio *ex fratre* Nepote curatae.

(385) Tametsi hac in Figura, quae illi est 2da., nosque transcripsimus, praesidio petito

ab Infinitis Seriebus ostenderit Spatium infinite-longum $ABFI = FB^2$, fueritque haec proprietas ex anterioribus inventis Hugenii ad Logarithmicam pertinens etc.

(386) Id intelligi velim eo sensu solummodo, quem explicavi in *Adnotatione* 320ⁿᵃ.

(387) Pluries ista in *Exercitatione*, sed praesertim in *Nota* 18ᵛᵃ. *Antelogii*, de huiuscemodi Infinito disserui (vid. etiam pag^{im}. 253^{iam}. *Actorum Berolinensium* pro anno M.DCC.LX^{mo}., ubi Ioannes Albertus Eulerus haec scripsit $\sqrt{fL\frac{a}{o}}$, *qui est une quantité infinie pour ainsi dire du plus bas ordre, parce que la racine quarrée se tire du logarithme d'un infini, qui est déjà infiniment plus petit que* $\frac{a}{o}$). Hoc Infinitum prae omnibus abunde satis doctissimeque versavit Gregorius Fontana in *Disquisitione* XIII^{ia}. *De Infinito Logarithmico* a pag^{a}. 303^{ia}. ad 323^{iam}. alias inter Physico-mathematicas Papiae excusas anno M.DCC.LXXX°.

(388) Istud Theorema videbis in *Lectionum Geometricarum* XII^{ma}. Isaaci Barrowii ad pag^{m}. 105^{tam}. et Numeros I^{um}. ac II^{dum}. Figurasque 156^{tam}. ac 157^{mam}.

(389) *De Sphaera et Solidis Sphaeralibus = Florentiae* anno M.DC.XLIV^{to}., *Horologium oscillatorium* Lutetiae Parisiorum in lucem editum a pag^{a}. 72da. usque ad 77^{mam}., *Supplement sur la Geométrie, & sur la Statique d'Archimedes* XXXI^{a}. *Mémoire* ad pag^{am}. 453^{iam}. Voluminis III^{ii}. *Essais et Recherches de Mathematique et de Physique = Par M. Parent* 2^{dae}. editionis Parisiensis anni M.DCC.XIII^{ii}.

(390) Philippus De La Hire l°. c°. in *Adnotatione* 77ma. sine *exhaustionum* methodo negativa, et absque *limitibus* vel infinite-parvis hoc Archimedis inventum fortasse unicus demonstravit.

(391) In *Perellianis*. (Vide *Notam* 74^{tam}.)

(392) *Saggio sopra l'Architettura Gotica = in Livorno* M.DCC.LXVI. = Pauli Frisii.

(393) *Caroli Renaldini Serenissimi Cosmi* III. M. E. D. *Philosophi ac Mathematici, et in Patavino Lyceo Philosophi primae sedis Geometra promotus eidem Serenissimo* M. D. *dicatas = Patavii =*. Mediceas Lineas in tria *genera* distinctas, quibus et *aliud quoddam* Auctor addidit *genus*, a pag^{a}. 12ma. usque ad 42^{dam}. haud parum commendavit Iacobus Gregoryus. Sed meo iudicio multo magis laudandae eae, quas Christianus Hugenius Academiae Parisiensi dicavit in *Epistola de Curvis quibusdam peculiaribus* memorata inter *Geometrica varia* ad pag^{am}. 351^{mam}. Voluminis II^{i}. veteris *Historiae* eiusdem Academiae. (Vide *Notam* 431^{am}.).

(394) Ipsius momenti sunt cetera, quae Renaldinus in lucem ediderat ad promovendam Mathesin, veluti *Ars Analytica-Mathematica in tres partes distributa = Florentiae* M.DC.LXV., *Artis Analyticae-Mathematicae pars secunda = Patavii* M.DC.LXIX., *De resolutione ac compositione Mathematica Libri duo ad Principem Cardinalem*

Cardinalem Leopoldum ab Etruria = *Patavii* M.DC.LXVIII. etc. Patria erat Anconitanus, in qua fato cessit anno vertente M.DC.XCVIII.^{vo}., ad instituendom in Mathesi Cosmum Medices Etruriae Principem deindeque huius nominis III^{tium}. M. D. a Ferdinando II^{do}. vocatus fuit, et osque ab anno M.DC.LXVII^{mo}. ad Philosophiam profitendam in Patavina Academia a Senatu Veneto renunciatus, atqoe fortunae faventis miraculo 1200. Florenorum aoreorum annuo stipendio conductus (scilicet ducentis amplius divino illo Galilaeo ......) et postmodum 1800. etc. etc.

(395) Problema 27um. ad pag^{am}. 157^{am}. in Capite V^{o}. Sectionis I^{ae}. Partis I^{ae}. *Institutionum Calculi Integralis* Euleri.

(396) Vide I^{um}. nuperrime memoratum, necnon Volumen II^{um}. *Tractatus Fluxionum* Maclaurini ad pag^{am}. 290^{am}. Neminem profecto latet esse $L \dfrac{1}{Tang.\left(45^\circ - \frac{1}{2}\,\varphi\right)}$ $= L\; Tang.\,(45^\circ + \frac{1}{2}\,\varphi)$ *signorum* consideratione reiecta. Ceterom antiquior huiusce Theoriae investigatio exstat in Wallisii Epistola ad Richardum Norrisium *concerning the Collection of Secants, and the true division of the Meridians in the Sea-Chart*. (N°. 176. T. XV. *Trans. Philos.* a pag^{a}. 1193^{ia}. ad 1201^{mam}.).

(397) Nam si in *Functione* $\dfrac{dx\sqrt{a^4-x^4}}{x}$ substituatur ex Elementis $az = \sqrt{a^4-x^4}$, illud Differentiale vertitur in rationalem Formulam $-\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{z^2\,dz}{a^2-z^2}\right)$ ab Hyperbolae *quadratura*, Logarithmisve pendentem. Quo ad proprietatem Parabolae inferius adsertam consolendum est Capot IX^{um}. *Speculi ustorii*, vel VI^{tu}. *Exercitationum Mathematicarum* Cavalerii ad pag^{am}. 516^{tam}. edit. Bon. anni M. DC. XLVII^{mi}., Liberve III^{ius}. *De Locis Solidis etc.* Vinceotii Viviani ad pag^{am}. 51^{mam}. in Propositione II^{da}.

(398) Consulantur l^{i}. c^{i}. in *Adnotatione* 38va., et signanter pag^{a}. 439. Voluminis I^{mi}. *Operum Omnium Johannis Bernoullii*.

(399) Ad Num^{um}. CC.LXII^{um}. et a pag^{a}. 268va. usque ad 277^{mae}. medietatem. Tam hoc, qoam sequens Caput XIX^{um}. innituntur repertis ab Alemberto in Articulo II°. Dissertatioois editae inter alias Volominis Academiae Berolinensis pro anno M.DCC.L^{mo}. *De la Quadrature des Courbes, dont les Équations ont trois ou quatre termes* a pag^{a}. 363^{ia}. osque ad 369^{nam}.

(400) Si nolis Barrowium consulere (ad pag^{am}. 107. N^{m}. XI. Fig^{am} 58. XII^{mae}. *Lectionum Geometricarum*), vide Grandum in *Demonstratione Problematum Vivianeorum etc.*

etc. impressa Florentiae sub annum M.DC.XCIX^um^. ad pag^am^. 89^nam^., ex qua id facile derivatur eâdem ferme ratiocinatione manente.

(401) Est unum ex Torricellii inventis ineditis iuxta obiter dicta in §°. 49no. Legatur potissimum eius Epistola MS^a^. sub diem 5^iam^. Augusti anni M. DC. XLVII^mi^.

(402) Quamplurimas elegantissimas formas combinatio Curvarum suppeditaret in Musiva, Anaglypha, Toreumata (ἀναγλύφα, τορεύματα), totamque Rem graphicam, quae ad *ornatum* referatur, perficiendam, dum satis exculta, et ab Architectis vere Geometris locupletata promoveretur.

(403) Nimirum per *abscissas* in eâdem recta positas *ordinatasque* inter se parallelas. Paucae enim Curvarum, ac plerumque *transcendentes*, veluti Spiralis Archimedea etc., ad focos referebantur in Analysi Cartesiana. Exemplum habes huiusce methodi nulli secundum in *Dissertatione* eiusdem Euleri typis edita vertente anno M.DCC.LVI°. sub titulo *Réflexions sur un Probleme de Géométrie, traité par quelques Géométres, & qui est néanmoins impossible* a pag^a^. 173^ia^. usque ad 200^mam^. *Actorum* Berolinensium pro anno M.DCC.LIV^to^. Sublimiores ibidem Aequationes considerat inter z et φ, veluti $z = a\sqrt[\lambda]{1 - Cos.\,\lambda\varphi}$, $z = \frac{a}{\sqrt[\lambda]{1 + Cos.\,\lambda\varphi}}$ etc., quarum prima Curvam multifoliam, altera Hyperbolicos ramos habentem designat, miroque artificio vertit in algebraicas Cartesii de more compositas (§^us^. 62^dus^. huius *Exercitationis*).

(404) Volumen II^dum^. *Introductionis in Analysin Infinitorum*, praesertim in Capite XVII^mo^. ad pag^am^. 212. atque sequentes.

(405) Etsi Hôpitalius in Propositione VII^ma^. Sectionis II^dae^. (*Analyse des Infinimentpetits*) Conchoidem istam prouti *Conchoidem-Circuli* animadverterit, et Hyperbolam Apollonii veluti Rectae Conchoidem (id primus, quod sciam, demonstravi in meis *Prolegomenis* ante Tractatum *Magnitudinum Exponentialium etc.* ad pag^am^. XXXIII^iam^.) nihilo tamen minus non est harum prior cum vera *Conchoide-Circuli* confundenda. Hic autem loquor de omnium simplicissimae Aequatione Conchoidis, quam etiam dedit Leonhardus Eulerus in Capite XVII^mo^. Tomi II^di^. *Introductionis* praecitatae, ac potissimum ad pag^as^. 224^tam^. et 225^tam^., atque N^um^. 414^tum^. etc. Interea moneo eodem in Volumine corrigendum esse (lin^a^. 10. pag^ae^. 225.) mendum typographicum $z = \frac{b}{Cos.\,\varphi}$, scribendamque (quemadmodum infra lin^a^. 30.) veram Aequationem $z = \frac{b}{Cos.\,\varphi} \pm c$ pro veterum Conchoide sistenda.

(406) Universalissimam Conchoidis huiuscemodi Aequationem habes in nuper adserto Euleri Volumine ad Caput idem XVII^um^. *De inventione Curvarum ex aliis proprie-*

proprietatibus. (Vide, ut de tota tibi constet theorice, Num^{os}. 414. 415. 416. 417. 418. a pag^{a}. 224ta. usque ad finem 226^{tae}. Leonardus idem Eulerus usum fecit uberrimum doctrinae ab ipsomet in antecessum prolatae *Dissertationem* conscribens in *Nota* 403^{ia}. memoratam, qua non modo Paraboleen Apollonii Aequatione $z = \frac{a}{1 + Cos.\ \varphi}$ praeditam recensuit (pag^{a}. 188.), verum etiam (pag^{a}. 195. ac Fig. 11ma.) *Cardioidem* amplissimam $z = \frac{a(1 + Cos.\ \varphi)^{2}}{(1 + \frac{1}{2} Cos.\ \varphi)^{4}}$ prae illa in Num^{o}. VII^{mo}. *Tabulae* §^{i}. 61^{mi}. consideravit.

(407) Sublimior Astronomiae pars, et praesertim ad calculorum praxin accommodata in Systemate Newtoniano hoc innititur fundamento. Epocham vide novi huiusce *algorithmi* trigonometrici in *Adnotatione* 343^{ia}., et eius fundamenta passim in I^{o}. *Introductionis etc.* antea typis excusae (M.DCC.XLVIII.) Volumine.

(408) *Florum Geometricorum manipulus Regiae Societati exhibitus etc.* (378. Art. I. a pag^{a}. 355^{a}. ad 372^{am}. in *Transactionibus* Philosophicis Londinensibus pro anno M.DCC.XXIII°. (Vol. XXXII.). *Flores Geometrici ex Rhodonearum et Cloeliarum Curvarum descriptione resultantes etc.* Florentiae anno M.DCC.XXVIII^{vo}. Rursum Lucae vertente anno M.DCC.XXIX^{no}. = *I Fiori Geometrici del P. Abate Grandi tradotti in Toscano dal Sig^{r}. Tommaso Narducci coll' aggiunta ec.* =. (Cramerus I^{o}. c^{o}. ad *Exemplum* IV^{um}. N^{i}. 170. Capitis X^{mi}. seu pag^{am}. 414^{tam}.). Flores illi pertinebant fortasse ad *Viridarium* ineditum, cuius in *Adnotatione* 372da. prope finem quaedam recensui.

(409) Scilicet in *Perellianis*. Exstat Opusculum notissimum ita inscriptum *Thomae Cevae e S. I. instrumentum pro sectione cuiuscumque anguli rectilinei in partes quotcumque aequales* = *Mediolani* M. DC. XCV. =. Ipsius inventum sibi vindicavit Tschirnhausenus usque ab anno M.DC.LXXV^{to}., quo illud Clerselerio communicaverat. (*Excerptum etc.* in Lipsiensi *Ephemeride* ad annum M.DC.XCV^{um}. pag^{is}. 322. ac 323.). (Consule idem *Diarium* etiam ad pag^{am}. 290^{mam}. et seqq., necnon *Praefationem* Guidonis Grandi ad Opusculum *De quadratura Circuli et Hyperbolae* 2^{dae}. editionis anni M.DCC.X., quae Marchionem Hôpitalium in *Tractatu* postumo *De Sectionibus Conicis* (*Traité des Sect. Coniq.*) instrumentum idem veluti suum produxisse Lectores admonuit).

(410) Quam Cousinus in Parte I^{a}. *Lectionum Calculi differentialis et integralis* Aequationem tradidit $\frac{1}{y} = \frac{c \pm b + c\ Cos.\ x}{2bc \pm b}$ (ubi *c constans* est iuxta singulares *casus* determinanda, *b* primus ex *Radiis-Vectoribus*) Sectionibus Conicis universis ad *fo-*

cum

eum relatis pertinentem, cum nostra congruere superius exposita $z = \frac{a}{1 + n\,Cos.\,\varphi}$ nemo non videt. Nam consensus iste ponitur in aperto semel atque fiant $z = y$, $a = (2c \pm 1)b$, $\varphi = x$, $n = c$, $1 = c \pm b$, scilicet brevius, $y = z$, $x = \varphi$, $c = n$, $\pm b = 1 - n$, $a = \pm(1 \mp n)(2n \pm 1)$. Quod autem ad *Spiricas* adtinet, fatendum est Lineae heic contemplatae Radios z Elementis Perimetri cuiusdam Ellipseως conicae *datae* proportionem servare per ea, quae de Formulis a Cl. Le Gendre primum animadversis explicavi in *Adnotationibus* 112ma. et 148^{a}. Exinde lucem perquam maximam mutuantur genesis et descriptio ipsius Lineae, quam alibi protuli in meo *de Lineis Persei Specimine*, ratioque tum constabit geometrica *immediatae* derivationis fundamenti doctrinae Le Gendre a doctrina Pascalii. Tandem aequipollentes esse Aequationes, etsi prima fronte diversas, $z = \pm a\sqrt{-Cos.2\varphi} = \pm a\sqrt{Cos.2\varphi}$ paullo postea descriptas, Eulerus ipse exposuerat, pro expressione saltem eadem sistenda $+ Cos.\,\varphi$ aut $- Cos.\,\varphi$ ad Linearum constructionem, in Corollario 2do. ad pag^{am}. 186^{tam}. *Disquisitionis* suae, de qua loquitur *Nota* 403^{ia}., nosque procul dubio multoties innuimus.

(411) Maximopere diversa est ista Curva a pariter nodata, sed *transcendente*, de qua superius egi sub finem §^{i}. 44^{ti}., cuiusque symptomata exstant in I°. antea c°. *Mémoires de l' Académie Imperiale et Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles* = *Tome second* = M.DCC.LXXX., et signanter ad pag^{am}. 145^{tam}. et seqq. *Dissertationis* inscriptae *Mémoire sur les Courbes que décrit un Corps qui s' approche ou s' eloigne en raison donnée, d' un point qui parcourt une ligne droite* = *Par M. Le Chevalier Nieuport* (16. *Septembre* 1777). Aequatio enim illius Curvae statim concinnata huc reducitur $x^6 + 2x^4(y^2 - a^2) + x^2(y^2 - a^2)^2 - 4a^2y^2(x^2 + y^2) = 0$, aut potius $(x^3 - 2ax^2 + a^2x + y^2x - 2ay^2)(x^3 + 2ax^2 + a^2x + y^2x + 2ay^2) = 0$, vel simplicius $x^3 - 2ax^2 + a^2x + y^2x - 2ay^2 = 0$ (haud confundenda cum ea Curvae Parabolici generis Newtoni (*Species* 68va. Fig^{ae}. 77^{mae}.), namque Asymptota gaudet inventu facili per geometricam Synthesin, quum sit illa Ordinatarum a *nodo* distans aeque ac *nodus* a vertice Folii), nimirum est Lineae *geometricae* (quemadmodum observavi), nec novae, sed ex Newtonianis (*Species* 41^{a}. ac Fig^{a}. 50^{a}.). (Vide Cramerum in Exemplo I^{mo}. N°. 170. pag^{a}. 411. Capitis X^{mi}. Operis, cuius loquitur *Nota* 135ta.).

(412) Consule Propositiones aut Problemata X^{um}. et XI^{um}. Capitis III^{ii}. Libri I^{mi}. in Tomo citato. Fama est non Villalpandi, sed Christophori Grienbergeri Iesuitae filias fuisse huiuscemodi Ovales in Fig^{is}. 10ma. atque 11ma. delineatas. (Vide *Notam* 174^{tam}.).

(413) *De Cissoide quadam a Dioclea diversa.*

(414) Epitheton *lemnisceroticae* aptum quidem est *singulari* puncto triplici Curvae indicando

indicando et rite recteque accommodatum illius *speciei*, quam primus animadvertit in Lineis ordinis 4^{i}. Cl. Bragelonguus (*Nota* 33^{ia}. *Antelogii*), haudquaquam vero *Cissoidis* titulus, proptereaquod ab imitatione figurae hederae folii quammaxime Ovalis eadem aberret. (Vide *Adnotationem* 181^{am}.). Ceterum puncta *singularia lemniscerotica* et visibilia et invisibilia consideraverat iamdudum Cramerus, quinimo et in Lineis parum ab ista Ovali diversis, utpote quae praeditae sint Aequationibus $y^4 + 2ayyx + x^4 - 2ax^3 = 0$, $y^4 + x^4 - 2ax^3 = 0$, nomenque inditum punctis ipsis *point de triplicité invisible qui renferme virtuellement deux Feuilles*. (Vide *Introduction etc.* ad pag^{as}. 422. 610. et 654. Figurasque 128. Tab^{ae}. XVII^{mae}. 207. ac 208. XXVII^{mae}.et 225. ad N°s. 4. 8. XXXIII^{iae}.

(415) Ad calcem, et signanter in pag^{is}. 280na. ac 281ma.

(416) Repetenda Libri citatio, de quo iam scriptum in *Nota* 87ra. *Iter Geometricum* adpellavit Vivianus *Oblectamentum Geometricum*. Sed potius verterem litteraliter in *Deambulationem* (diporto) *Geometricam*. = *Continuazione del Diporto Geometrico* = *Modi vari meccanici, lineari, e solidi tentati da V. V. per le costruzioni di due illustri Problemi, il primo della divisione dell' Angolo in data proporzione, il secondo dell' invenzione delle due Medie proporzionali* =.

(417) Villalpandus enim in Fig^{a}. 11ma. l^{i}. c^{i}. (*Nota* 412.) usus est in eam Lineam describendam proportione geometrica quatuor conflata terminis, vel gemino Circulo, dum ex adverso tribus Vivianus, et Circulo unico, ut infra patebit.

(418) Est illa depicta in Fig^{a}. 10ma. Villalpandi.

(419) Vivianus l^{o}. c^{o}. invenit $BV = \frac{7}{16}. AB$; Lorgna l^{o}. pariter c^{o}. $AV = \frac{9}{8}. a$ dum $AB = 2a$, et idcirco $AV = \frac{9}{16}. AB$. Vivianus statuit $AB : TV :: 16 : \sqrt{27}$. Lorgna de hoc *maximae* Ordinatae valore Analystis Aequatione potitis curam omnem reliquit.

(420) Opusculum III^{ium}. Lorgnae superius memoratum ad pag^{as}. 45^{tam}. et 46^{tam}. Bougainvillius in *Tabula* Partis I^{mae}. ad pag^{am}. 121^{mam}.

(421) Consulantur Lib^{i}. VII^{mi}. Propositiones variae a pag^{a}. 703^{ia}. usque ad 865^{tam}. in decem Partes distributae sub titulo praemisso *De ductu Plani in Planum* Tomi II^{di}. *Operis* multoties citati, ac praecipue in *Adnotatione* 72da.

(422) Valde differt Solidum meum Cyclo-parabolicum ab altero, quod Guido Grandus animadvertit et dimensus est in *Geometrica Demonstratione Vivianeorum Problematum* ad pag^{am}. 130^{am}. et seqq., euius in *Perellianis* quaedam nova adnotavi.

(423) Adseruit tantummodo demonstravitque praesidio Calculi infinite-parvorum doctissimus Lorgna Ovalis Aream a Circuli *quadratura* pendere. (l^{us}. c^{us}. in *Nota* 420.).

(424)

(424) Inter formulas Capitis V^{i}. *Operis* Euleriani superius recensiti in *Adnotatione* 395ta. ac paullo post repetendi, et signanter ad *Scholion* Problematis 25^{ti}. (pag^{a}. 153.) exstat $\int d\varphi . Cos^{6}. \varphi = \frac{1}{6} Sin. \varphi . Cos^{5}. \varphi + \frac{1.5}{4.6} Sin. \varphi . Cos^{3}. \varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6} Sin. \varphi . Cos. \varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6} \varphi$.

(425) Leonardi Euleri acutissimum ingenium, miraque et indefessa Calculorum facilitas in eo maxime elucent.

(426) Neminem hodie latet post editionis epocham (M.DCC.XXII.) *Harmoniae Mensurarum* Rogeri Cotesii *Tabulas* ipsas servata eàdem methodo *trigonometrica* per Arcus *imaginarios* Areas quoque Hyperbolicas complecti posse. Ioannes Henricus Lambertus post Maclaurinum et Davietum Foncenexium hoc praestantissimum argumentum usque ab anno M.DCC.LXVII^{mo}. fusius excoluit, novisque adcessionibus locupletavit. (*Commentarii Berolinensis Academiae* pro anno M.DCC.LXI^{mo}., in lucem editi vertente anno M.DCC.LXVIII^{vo}., a pag^{a}. 265ta. ad 323^{tiam}., ubi exstat *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires & logarithmiques* (*lû en* 1767.)). (Vid. praesertim §^{um}. 75^{tum}. atque sequentes). Rursum egregius ipse Geometra eamdem Spartam ornavit in Volumine XXIV^{to}. Academiae praecitatae ad annum M.DCC.LXVIII^{vum}. editionis M.DCC.LXX. (*Observations Trigonométriques* a pag^{a}. 327ma. ad 355^{tam}.). Sed consulendae praesertim sunt *Tabulae* analytica atque numerica in pag^{is}. 334. 335. 353. 354., quibus et anguli *veri*, ac *transcendentes*, cunctaque continentur, quae eruditissime ab Auctore vocantur *Parallélisme entre la Trigonométrie Circulaire & Hyperbolique*.

(427) *Enumeratio Linearum tertii ordinis in Opusculorum* Volumine I^{mo}. ad pag^{am}. 263^{tiam}. et Fig^{am}. 78^{vam}.

(428) Cramerus ad pag^{am}. 584. et Fig^{am}. 200. Tabulae XXV^{tae}. Num^{o}. 1. in *Opere*, cuius meminit *Adnotatio* 135ta. *Theoria nova Magnitudinum Exponentialium etc.* in Capite IX^{no}. et pag^{a}. 576ta. ad §^{um}. 384^{tum}., atque iterum in *Nota* (***) pag^{ae}. 577^{mae}.

(429) Ex MS. Palatino Cl. Angelus Fabronius transcripsit et in lucem edidit *Racconto d' alcune Proposizioni proposte e passate scambievolmente tra i Matematici di Francia e me* (Torricellium) *dal* 1640. *in quà* ad pag^{am}. 376^{tam}. atque seqq. Voluminis I^{mi}. eorum, quibus titulum fecit *Vitae Italorum doctrina excellentium, qui saeculis* XVII°. *et* XVIII°. *floruerunt*, Pisis impressi apud Carolum Ginesium vertente anno M.DCC.LXXVIII^{vo}. Ibidem igitur pag^{a}. 395ta. in Vita Evangelistae Torricellii Thomae Perellio dicata legitur *Num^{o}*. XLVIII. *La Superficie del Cono Scaleno vien misurata da M. Roberval. Questo Problema già sono molti anni che è stato da lui*

proposto,

proposto, nè per ancora da alcuno è stata trovata la dimostrazione etc. Torricellius autem vita functus est die 25ta. Octobris labentis anni M.DC.XLVII^{mi}.

(430) Rursum perlege *Adnotationem* 16^{tam}. In Collectione Operum Robervallii (*Nota* 3^{ia}.) nullibi exstat Superficiei dimensio, de qua nunc sermonem instituo. Exinde oritur quod adfirmaverit Varignonus (*Nota* 431.) *At non item in obliquangulis Conis, quorum Superficies qui definiverit, neminem novi*. Et Eulerus in sua *Dissertatione* inferius citanda (*Nota* 435.) ad §^{um}. 1um. hoc habet, *Celeb. Varignonius in Miscell. Societatis Regiae Berolinensis Continuatione II. argumentum hoc prorsus novum primus tractavit etc.*

(431) *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Tome II. Depuis* M. DC. LXXXVI. *jusqu'a son renouvellement en* M.DC.XCIX. Pag^{a}. 340. N°. 2. = 1698. = *Il à traité de nouveau* (M. Varignon) *de tous les genres de Spirales; il à donné des demonstration sur la Superficie des Cones obliques, etc.* =. Editio *Collectionis* huiusce prodiit Lutetiae Parisiorum anno M. DCC. XXXIII^{io}.

(432) Ad pag^{am}. 280^{am}. exstat *Petri Varignonii Schediasma de dimensione Superficiei Coni ad basim circularem obliqui ope longitudinis Curvae, cuius constructio a sola Circuli quadratura pendet*.

(433) In pag^{a}. 285ta. *Additio G. G. L. ostendens explanationem Superficiei Conoidalis cuiuscunque, et speciatim explanationem Superficiei Coni scaleni, ita ut ipsi vel eius portioni cuicunque exhibeatur Rectangulum aequale, interventu extensionis in rectam Curvae, per Geometriam ordinariam construendae*.

(434) *De Superficie Cylindri et Coni scalenorum* = *Auctore Georgio Wolffgango Krafft* = ad pag^{am}. 92^{dam}.

(435) Pag^{a}. 3^{ia}. *De Superficie Conorum scalenorum, aliorumque Corporum conicorum*.

(436) *Septième Mémoire* in Articulo = *De la Surface des Cones obliques* = a pag^{a}. 234ta. usque ad 237^{mam}. Cousinus in Parte II^{da} *Lectionum etc.* ad pag^{as}. 472. 473. 474. ex ipso Alemberto.

(437) Eodem in Volumine II^{do}. *Historiae* Academicae, cuius supra mentio facta in *Adnotatione* 431ma., ad pag^{am}. 260^{am}. et Annum M.DC.XCV^{um}. haec recensentur de Varignono *Il à donné* dans une Mémoire *la rectification & la quadrature de l'Evolûe du Cercle*. Id fortasse ignoraverat Grandus scribens *Prostasin* suam *ad Varignonii exceptiones etc.* (Pisis M.DCC.XIII. pag^{a}. 39.). Ceterum in illius Geometrae *Schediasmate* (*Nota* 432.) ad §^{um}. 2^{dum}. sub finem habetur *elementum* Conicae *scalenae* Superficiei sive $y\,dx = dx\,\dfrac{\sqrt{eerr - 2ferv + ffxx}}{2\sqrt{2rx - xx}}$, atque in Krafftii Lucubratione (*Nota* 434.) idem $ydx =$ (ad §^{um}. 10um.) $- dx\,\dfrac{\sqrt{(rr + bx)^2 + a^2r^2}}{2\sqrt{r^2 - x^2}}$.

(438) In praecitata *Memoria* septima (*Adnotatio* 436ta.), cui Auctor ipse titulum posuit *Supplément aux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Prusse de* 1746. & 1748., haec verba exstant *Prooemii* ad pagam. 231mam. *la quadrature de la Surface des Cônes obliques: matiere qu' un Géometre très - célèbre a déja traitée dans les* Nouv. Mém. de Petersb. T. I., *mais en réduisant la quadrature de cette Surface à la rectification d' une Ligne du sixiéme ordre*. Eulerus etiam in §°. 1°. (*Nota* 435.) idem statuit *Quamobrem operam meam non inutiliter mihi equidem collocasse videor, si primo Superficiem Coni scaleni ope rectificationis Lineae algebraicae ordinis sexti exhibuero. etc.*

(439) *Occurrunt de eodem hoc Problemate Dissertationes Leibnitii, atque Varignonii in Miscellaneis Berolinensibus, Contin*. II., *quorum hic pro solutione Curvam dedit dependentem a quadratura Circuli, sed cuius dein Curvae rectificatio Problemati quaesito nostro inservit, sed modo valde prolixo et imperfecto, ille autem quaestionis huius responsionem dedit ingeniosam quidem, sed molestissimam, per rectificationem Curvae alicuius descriptu valde difficilis, cuius Aequatio, si ad coordinatas orthogonias reduceretur, ad ingentem numerum dimensionum ascenderet*. (Vide §um. 11mum. l. c. in *Adnotatione* 434ta.).

(440) Oritur ista Linea ex Cousini Formula $-dx\dfrac{\sqrt{h^2+(ax-1)^2}}{2\sqrt{1-x^2}}$, quam post Alembertum ipsum (*Nota* 436a.) ad Elementum protulit Superficiei Conicae *scalenae* repraesentandum. Haec autem 4ti. Ordinis Linea cum ea Krafftii perfecte consentit; quod luculenter patebit si rursum perlegeris *Adnotationis* calcem 437mae.

(441) Quinimo Alembertus ex adverso statuit in *Corollario* ad pagam. 236tam. l. antea descripti nunquam Problema ab area Circuli resolutum iri, nisi unica hypothesi Coni *recti* concessa.

(442) Vide *Adnotationem* 436tam. Hoc in loco emendavit Cousinus typothetica vitia, quorum *Notae* inferius scribendae 446ta. et 447ma. mentionem faciunt.

(443) De huius Lineae Area disseruit Grandus in Propositione IVta. ad pagam. 7mam. editionis 2dae. Opusculi sui *Quadraturae Circuli & Hyperbolae*. Ipsam ego Curvam versavi in Capite VI°. ad Numum. 261um. paginamque 351am. mei Tractatus *Magnitudinum Exponentialium etc.*

(444) Ab eodem Circulo genitore *IPHQ*, ut in Figa. 52da., innumerae gigni possunt *Versoriae* quo ad Grandianam inscriptae vel circumscriptae, tam eodem vertice *R*, quam eâdem asymptota *IHK* gaudentes, et Aequatione communi simul expressae $xy^2 = n \cdot a^2(a-x)$, posita diametro $RH = a$, abscissis x computatis a puncto H eius extremo, et ordinatis diametro ipsi normalibus. Numero $n = 1$ respondet

det Grandi *Versoria*, ab eo sic exposita $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$, dummodo coordinatarum *species* permutentur, vertaturque Aequatio in alteram $x = \frac{a^3}{y^2 + a^2}$. Quum autem $n > 1$ innumerae oriuntur *circumscriptae Versoriae*; et e contra quum $n < 1$ innumerae *inscriptae*, prouti Schema demonstrat. Sed et aucto vel diminuto genitore Circulo *Versoriarum* species ac numerus in immensum excrescunt. Nonnullae ad diametros adtinentes DH, TH, RH, SH etc. *genitorum* depictae sunt in Figura, earumque forma varia propinque satis delineata, adeo ut, si totam velis universitatem *Versoriarum* complecti, Aequatio ad eas spectet oecumenica $xy^2 = n'. a'^2 (a' - x)$, in qua, praeter x, y, etiam n', a' *variabiles* effingantur. In §. 10mo. ad pag^{am}. 262^{dam}. citatae dudum *Enumerationis* Newtonianae (T. I. *Opusculorum etc.*) castigandus est error Aequationis $xyy + ey = ex + d$, quum scribi debuisset $xyy + ey = -ex + d$ iuxta praedicta in §°. 9no.

(445) Epistola data fuit. Kal. Aprilibus anni M.DCC.XIX^{ni}. et a pag^{a}. XIII^{ia}. usque ad dimidium ultra XLIV^{tae}. *Exercitationi* inferius memorandae praemissa. *Versoriam* quaere universalissimam in *Specie nona* Capitis IX^{i}. ad pag^{am}. 125^{tam}. Tomi II^{di}. Eulerianae *Introductionis in Analysin Infinitorum*.

(446) Formulae tamen a Cl. Auctore traditae (*Nota* 436.), prouti

$-dz \frac{\sqrt{bb + (1 - cz)^2}}{\sqrt{1 - zz}}$ etc. ad pag^{am} .235^{tam}., in hoc peccant, quod desit in Denominatore numerus *factor* 2 (*Adnotatio* 440.), et idcirco duplum elementi Superficiei conicae repraesentent. Iterum dum agit de Cono elliptico tam *scaleno*, quam *recto*.

(447) Alembertus l°. c°. in *Adnotatione* 441ma. sic ait *dans tout autre cas la quadrature de la Surface conique dependra de celle d'une Courbe d'un troisième genre*. Sectiones ideo conicas non modo praetermisit, verum etiam nomen *Courbe* vice τῦ *Ligne* oscitanter adhibuit. (Vide *Notam* 367^{am}.)

(448) *De la Surface d'un Cône qui a pour base une Ellipse* a pag^{a}. 236ta. usque ad 244^{tam}. Voluminis *Opusculorum*, cuius mentio facta in *Adnotatione* 436ta. At praecipue omnium legendus est §^{us}. I^{us}. in pag^{a}. 237ma.

(449) Vide l^{i}. c^{i}. §§^{os}. II^{um}. ac III^{ium}. ad pag^{as}. 237^{am}. 238^{vam}. ac 239^{nam}.

(450) *Appendicula* 2da. ad Propositionem IV^{tam}. et Fig^{am}. 179^{nam}. sub finem Pag^{ae}. 120^{mae}. = *Lectiones* XVIII. *Cantabrigiae in Scholis publicis habitae, in quibus Opticorum phaenomenωn genuinae rationes investigantur. Annexae sunt Lectiones aliquot Geometricae* = *Typis Gulielmi Godbid* =.

(451)

(451) Iunio vertente ad pag^{am}. 264^{tam}. et seqq. *Supplementum defectus Geometriae Cartesianae etc. De complanatione Superficierum Conoidearum et Sphaeroidearum etc.* in Collectione *Operum omnium* Ioannis Bernoulli ad Num^{um}. XXX. et pag^{am}. 155^{tam}. Voluminis I^{mi}., et signanter quo loci (pag. 160. 161.) scriptum exstat *Hinc etiam emergit insignis Coni recti proprietas etc.* Revera Theorema Conicum illud hanc primam epocham noscit, tametsi Guido Grandus idem vulgaverit, et iisdem paene ornatum a Bernoullio adnotatis (pag^{a}. 161.) testudinibus sive tentoriis, labente anno M.DC.IC^{o}. (videatur pag^{a}. XIV^{ta}. *Praefationis*, cuius meminit *Nota* 409na.), deindeque anno M.DCC.V^{to}. Antonius Parentus. (Consule Volumina II^{dum}. ad pag^{am}. 479^{nam}. ac III^{ium}. ad 444^{tam}. et N^{um}. 4^{tum}. *Essais etc.* ut in *Adnotatione* 25ta.). (Vide etiam *Notam* 171^{am}.).

(452) Ad pag^{am}. 239^{nam}. $\frac{-dz\sqrt{bbaa + ceaa - 2ce^2z}}{\sqrt{aa - zz}}$ *seroit même réductible à la rectification du cercle, si* bbaa + ceaa — 2cez *étoit un multiple de* a — z. *Or cette condition donne* 2ee^{2} = bba + eea *etc.*

(453) In Pag^{a}. 237ma. Corrige insuper erratum Auctoris ad pag^{am}. 240^{mam}. *dépend de la quadrature des Sections Coniques*, quum scribi debuisset *de la rectification*.

(454) Ad §^{um}. 1um. pag^{ae}. 237^{mae}. in hypothesi $c = 0$.

(455) Haudquaquam $\sqrt{b^2 + c^2}$ ut Alemberto placuit. Alias id observaveram de Cono quoque circulari in *Adnot atione* 446ta.

(45 5/6) Duobus simul numeris deliberato animo hic iunctis citatione unica satisfaciam. *Problemata Mathematica Neapoli ad Collectores Actorum Eruditorum transmissa* ad pag^{am}. 28. et seqq. (Vide etiam *Notam* 429^{nam}.)

(457) Perlege I^{um}. c^{um}. in *Adnotatione* 26ta.

(458) A linea quoque *recta*, nedum a Circulo, enasci potest Ellipsis Apolloniana. Hoc tradidit evidentissimum Gregorius a Sancto Vincentio in Prop^{ne}. C.XLIX^{na}. Partis V^{tae}. Libri IV^{ti}. Tomi I^{mi}. ad pag^{as}. 322. 23. sui *Operis* a 72da. *Nota* nunciati, Istius originis memini in mea *Sectionum Conicarum Synopsi* (Adnotationes 188va. et 375ta.) praeter Newtoni principium uberrimum sic expressum *Hyperbolismum Figurae vero, cuius ordinata prodit applicando contentum sub ordinata Figurae illius et Recta data ad abscissam communem*. (Vid. Pag^{am}. 261^{am}. ad Numerum 9um. *Enumerationis Linearum tertii Ordinis*).

(459) *Appendix* Opusculi recensiti superius in *Nota* 408va.

(460) Ad Pag^{am}. 550. Numerumque 366^{tum}.

(461)

(461) Scilicet tam in *Perellianis*, quam in *Tractatu de Solidis Cochlearibus*. (Vide *Notas* 74^{tam}. et 76^{tam}.).

(462) Exstat 1°. c°. in *Adnotatione* 137ma.

(463) Pag^{a}. 79na. ac seqq. *Des Courbes propres à égaler la levée et l' abattement des Pont-Levis*, Tab^{a}. III^{ia}. *des Pieces nouvelles* in Fig^{a}. 4ta. *Des Courbes propres à égaler la levée des Pistons &c.*

(464) *Mémoires des Pieces nouvelles de Mathematique & de Physique* ad pag^{im}. 1^{am}. atque seqq. 3^{iae}. numerationis in Pag^{a}. 79na. et seqq. ac Fig^{a}. 4ta. Tabulae III^{iae}. etsi typothetae vitio scriptum fuerit *Planche* II.

(465) Confer pag^{as}. 82. 83. 1^{i}. antea citati. Inservit etiam eadem Curva *dentium* Rotarum figuris sistendis, ut Parentus ipse in Articulo I^{mo}. disseruit a pag^{a}. 1ma. usque ad 37^{mam}. *Des figures des dents ou alles de roues etc. etc.*; quod mechanico-geometricum argumentum post Philippi De-La-Hire meditationes perquam maxime illustravit Lotharingius Camusius in *Memorabilibus* Scientiarum Academiae Parisiensis relatis ad annum M.DCC.XXXIII^{ium}.

(466) Consulatur *Adnotatio* 437ma.

(467) Apologorum Scriptor repetitis editionibus celeberrimus, quondam mihi amicissimus, hasce Mathematicas Dideroti raritate caras *Mémoires &c.* in 8vo. eleganter impressas, eique multis abhinc annis expostulanti a me mutuum datas, hactenus maximi aestimat.

(468) De Vocum discrimine minus noto Κοχλίας, Σπεῖρα, Ἕλιξ nonnulla scripsi in *Opusculo* inedito, cui titulum feci *Specimen interpretationis obscuriorum in Graeca Mathesi locorum* κατὰ Γεωμετρίαν.

(469) Ad hoc enim sufficit ut instar Lineae rectae Cochlea ista consideretur. (Vide *Notam* 76^{tam}.).

(470) Elementa *Calculi Integralis* in Sectionis I^{ae}. Partis I^{ae}. Capite V^{to}., et signanter in Problemate 25to.

(471) *Analyse des Infiniment-petits = par M. De L' Hôpital =* in Exemplo IX^{no}. Propositionis II^{dae}. Sectionis V^{tae}., in II°. III^{io}. IV^{to}. Propositionis I^{ae}. Sectionis VI^{tae}., et rursus in Sectione IX^{na}. a §°. 171mo. usque ad 186um., *Transactions Philosophical* passim, Nicolius in *Actis* Academiae Parisiensis anni M.DCC.VIII^{vi}., iterum que Nicolius ipse, Bernoullius, Maupertuisius, et Clairautius in *Actis* iisdem anni M.DCC.XXXII^{di}., coniunctis etiam *Sphaericis* Epicycloidibus; ne dicam de Newtono in *Principiis* ad Propositiones XLVIII. ac XLIX. sive Theoremata XVI. ac XVII. Sectionis X^{mae}. Libri I^{mi}., ac Iohanne Bernoullio in *Lectionibus Calculi Integralis*,

 et

, et praecipue XXI^{ma}. XXII^{da}. ac XXIII^{ia}. ad pag^{am}. 448^{vam}. atque seqq. *Operum omnium* Voluminis III^{ii}. Adde pro omnigenis Epicycloidibus *Geometriam Organicam* Maclaurini in pag^{ne}. 40. et seqq., de qua loquitur §^{us}. 63^{ius}. necnon *Adnotatio* 508va., et nuperrimas meditationes ingeniosissimas *sur les roulettes* Aloysii De La Grange in Articulo II^{do}. a pag^{a}. 133^{ia}. ad 138^{vam}. Voluminis, de quo sermo est in *Nota* 525ta., Regiae Berolinensis Academiae.

(472) Propositione usus sum Vincentii Viviani XCIII^{ia}. vel Problemate XVI^{to}. ad pag^{am}. 128^{vam}. Libri II^{di}. *Divinationis in V^{tum}. Apollonii Pergaei de Maximis et Minimis etc.*, quae tamen ex *Euclidis* Propositionibus III^{ia}. Libri IV^{ti}. ac XXVII^{ma}. Libri VI^{ti}. sine Vivianeae methodi adiumento potest illico demonstrari et resolvi cum Thoma Perellio l^{o}. c^{o}. in *Adnotatione* 521ma. Quomodo haud in auxilium vocato Calculo Differentiali idgenus *Maximum* pro Epicycloidibus invenerit Hôpitalius, videndum est in Propositione III^{ia}. Sectionis IX^{nae}. *Analyseos infinite-parvorum*.

(473) Occasione Curvae cuiusdam polypetalae, quam summopere illustravit Cl. Gregorius Fontana l^{is}. c^{is}. sub finem §^{i}. 52^{di}., talem protulit *Cardioidis* descriptionem, qualem procul dubio est *primariae* Conchoidi-circuli convenire. (Vide pag^{am}. 204^{tam}. ad Num^{um}. VII^{um}.).

(474) Collectio sub titulo *Divers Ouvrages etc.* pluries citata, ad pag^{as}. 199. et 200.

(475) Hoc adfirmat Vivianus in *Appendice* memorata ab *Adnotationibus* 87ma. et 416ta.

(476) Aliqui Geometrarum haud recte interpretati sunt *hederaceam*, quia *serpat in Circulo ut hedera* (vid. *Archimedem* Rivalti initio Libri II^{di}. *De sphaera et cylindro* ad pag^{am}. 92^{dam}., atque iterum ex interpretatione Eutocii ad 96^{tam}. in Lemmate VII^{mo}. *Ad modum Dioclis, et picturam lineae cissoideae, seu hederaceae*). Vera enim vocis significatio ab eo pendet, quod Geometrae veteres nec totam nec asymptoticam Cissoidem ipsam animadverterint, veluti fusius ostendi in Opusculo *Notae* 468^{vae}.

(477) Liber II^{us}. *De Sphaera et Cylindro* in Lemmate I^{mo}. post I^{um}. Problema ad pag^{am}. 93^{tam}. Iterum ad pag^{am}. 355^{tam}. in Lemmate Libri ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ.

(478) Cave ne istam Lineam commisceas cum antiquorum Conchoide *secundaria* contracta vel protracta huiuscemodi, qualem primus, quod sciam, consideravit Wallisius in *Operum omnium* II^{do}. Volumine ad pag^{as}. 848. 849. atque 850. Nomen autem *Conchoidis*, quod Soverus in illud vertit *Lineae Conchyliatae*, male inditum *Conchoidi-circuli*, eoquod recedat summopere a *Conchae* figura. (*Nota* 473.).

Grandus

Grandus in *Scholio* I^mo^. Propositionis XXIV^tae^. Tractatus sui *De Quadratura Circuli et Hyperbolae* (ad pag^as^. 43. 75.) Conchoidem veram nuncupavit *circularem*, sed addidit, ne forte error irreperet, *a Nicomede propositam*. Ceteroquin consule *Tractatum* Iesuitae Nicolas *de Conchoidibus et Cissoidibus*.

(479) De hac Auctor ipse Tractatum scripsit, hodie deperditum, cui titulum posuerat *De Lineis Conchoidibus*, in quo Eudoxo Cnidio successuit. Easdem Curvas Geminus Rhodius denuo illustravit in *Enarrationibus* suis, praeter Hippiam Eleum, ubi *ortus* tradidit *Spiricarum*, *et Conchoidum*, *Hederaeque similium Linearum*. (Vide Proclum Libri II^di^. Capite XI^mo^., atque Eutocium Ascalonitam in *Commentariis* ad Librum II^dum^. Archimedis *De Sphaera et Cylindro*, ac signanter ubi inscriptum exstat *Modus Nicomedis etc.*).

(480) *Sixieme exemple de quelques autres Conchoides* ad pag^am^. 87^m m^. *Collectionis* citatae in *Nota* 474ta.

(481) Consulatur *Adnotatio* 406ta.

(482) In Numero 414to., ad Figuras vero 83. 84. 85. XX^mae^. Tabulae.

(483) Par^us^. nuper citatus, et signanter in lineis antepenultima ac penultima Pag^ae^. 224^tae^., secunda vero 225^tae^.

(484) Vide *Notas* 191^am^. et 410^mam^.

(485) Praefatio Libri V^ti^. ad pag^am^. 273^iam^. Operis Bartholomaei Soveri, Patavii in lucem editi anno M.DC.XXX°. sub titulo *Curvi ac Recti proportio:* Pappus autem in Propositione XXIX^na^. Libri IV^ti^., et in Prooemio ad eiusdem Libri Problema *de Anguli trisectione* post XXX^am^. Propositionem pag^a^. 61ma. *Collectionum etc.* Superficierum πληκτοειδῶν aut πλεκτοειδῶν mentionem iniens sic loquitur. *Una autem aliqua ex ipsis est, quae et admirabilis a Menelao appellatur* (ex Commandini versione). Fortasse ipsemet est Menelaus, qui primo Aerae Christianae vertente saeculo ternos de Sphaericorum doctrina trigonometrica conscripsit Libros, ab Eruditis Britannis impressos graeco-latinos.

(486) Tam ista enim Aequatio, quam altera, quae sequitur, permutatis Coordinatarum *speciebus* x, y, eodem redit cum $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2+y^2) + 2a^2y^2 = 0$, et $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2+y^2) + na^2y^2 = 0$, veluti habent pag^ae^. 79ta. 84ta. 85ta. atque 86ta. *Exercitationis* huiusce.

(487) H'e *adfinitatem* Curvarum toto caelo diversam intelligo ab ea, quam excogitavit ac definivit Leonardus Eulerus in Capite XVIII^vo^. *De similitudine & affinitate Linearum curvarum* Tomi II^di^. *Introductionis in Analysin Infinitorum* ad §^um^. 442. et pag^am^. 239. atque sequentes. Nam Aequationum compositionis imperfectam, sed aliqualem similitudinem vel dicas etiam analogiam et cognationem quamdam animadvertere cordi habui. (488)

(488) *Disquisitionis* titulus est *Sopra l' equazione d' una Curva* (vide pag^{am}. 176^{tam}. sub finem §^{i}. 52^{di}. huius Exercitationis), *sopra la falsità di due famosi Teoremi* (Adnotationem consule 25^{tam}. in Antelogio), *e sopra le Serie armoniche a termini infinitamente piccoli*. In versione autem Italica illius *Encyclopaediae* sic inscriptae *Dizionario universale delle Arti e delle Scienze, di Efraimo Chambers* editionis Venetae anni M.DCC.XLIX^{ni}. frustra *Cardioidis* vocem pervestigavi.

(489) Passim in §^{o}. 41mo. praecitato, sed quemadmodum monet *Adnotatio* 486ta. termino adhibito $2a^2y^2$ vice τῦ $2a^2x^2$.

(490) *Nota* 181ma., Auctoresque ibidem recensiti vultum doctissimi Iohannis Dominici Cassini ab hac Curva summopere recedentem ostendunt, quae aliquando biceps est, quinimo et in puncta vel in nihilum vertitur. Minori fortasse iniuria Willebrordus Snellius in *Cyclometrico*, Lugduni - Batavorum impresso vertente anno M.DC.XXI^{mo}., τετράγωνον dixit Helicem Cononis Samii vel Archimedis. (Vide Praefationem etc.).

(491) Quod in *Introductione etc.* Eulerus non fecerat, ut ostendam in §^{o}. 62do. ad pag^{as}. 208. 209., propinque satis persensit l^{o}. c^{o}. Commentariorum Berolinensium ab *Adnotatione* 403^{ia}., at pro *primaria* tantum Conchoide, haud tamen universaliter pro *secundariis* quemadmodum infra patebit. Epicycloidem Cordi similem Gabriel Cramerus cognovit (Capite X^{mo}. ad *Exemplum* III^{ium}. Numeri 173. et pag^{am}. 431. l^{i}. c^{i}. Figuramque 132. Tabulae XVIII^{vae}.), sed Conchoidem ab ea Curva significari a Circulo generatam vel nescivit vel in abscondito tenuit.

(492) Ad pag^{am}. 56^{tam}. atque sequentes. Aequatio vero exstat ad 59^{nam}. titulumque habet Diatriba *Illustris Marchionis Hospitalii solutio Problematis Physico-mathematici ab erudito quodam Geometra propositi*.

(493) Vide l^{um}. c^{um}. pag^{s}. 59na., quum e contra τὸ x statuerimus in §^{o}. 60mo. a puncto C vel D versus B. (*A dissertation on the use of the negative sign in Algebra &c. by Francis Maseres* = *London* 1758. = memorata etiam in *Nota* 18va. *Antelogii*).

(494) En eius verba in l^{o}. c^{o}. ad pag^{am}. 58^{vam}. *Caeterum hoc Problema .... mihi propositum fuit a Geometra quodam in Analysi Cartesiana exercitatissimo, qui asseveravit se quidem reperisse tandem viam perveniendi ad solutionem, sed opus habere, ut* 27. *analogias differentes institueret, priusquam detegeret naturam Curvae, adeoque cum ob nimiam prolixitatem valde operosi calculi solutionem imperfectam reliquisset, contentum fuisse determinatione approximante punctorum in Curva, id quod ad praxin sufficere credebat*. Bernoullius insuper ad 61^{am}. l^{i}. c^{i}...... *partim etiam quod celebris ille, quisquis sit, Analysta Cartesianus post* 27. *institutas analogias labore calculandi omnino fessus ab ulteriori disquisitione abstinuit*.

(495)

(495) L[ot]. c[at]. ad pag[am]. 57[mam]., et praecipue in Numeris 5[to]. ac 7[mo]. Addidit etiam in Num[o]. 6[to]. quaedam de *flexu-contrario*, quod tamen punctum, ubi locum habeat (N. 3.), facili labore profluit ex notissima ac pure geometrica tangentium Epicycloidum doctrina.

(496) In Num[o]. 7[mo]. et praedicta pag[a]. 57[ma].

(497) *Continet sexies Circulum suum generatorem etc.* ad pag[am]. 58[vam].

(498) *Acta Eruditorum Lipsiae* istius anni ad pag[am]. 59[nam]. atque seqq. *Operum omnium* Iohannis Bernoullii Volumen I[um]. in Num[o]. XXIII[o]. ac paginis 132. 133. etc. usque ad 139[nam]. *Animadversio in praecedentem solutionem illustris D. Marchionis Hospitalii. Demonstratio identitatis Curvae aequilibrationis cum Cycloide descripta ex circumvolutione rotae super rota aequali. Constructio etc.*

(499) In eiusdem anni *Actis Lipsiensibus* ad pag[am]. 372[dam]. *D. Marchionis Hospitalii Theorema novum de quadrandis Cycloidibus basium circularium pro quavis distantia puncti describentis a centro Circuli mobilis* usque ad pag[am]. 374[tam].

(500) Consulatur Propositio V[a]. Sectionis IX[ae]. *Analyse des Infiniment petits* (pag[a]. 225[ta]. sub finem in editione anni 1768.), quod Opus, ut norunt omnes, primitus impressum fuit vertente anno M.DC.XCVI[to].

(501) Praesertim legenda in hoc adstruendum pag[a]. 61[ma]. l[a]. primum e[a]. in *Adnotatione* 498[va].

(502) *In primo casu dum* a = b *Curva integra est aequalis sexdecuplo radio Circuli generatoris, et generatim quaelibet portio etc.* (Hôpitalius ad pag[am]. 58[vam]. et Numerum 8[vum]. l[a]. e[a]. in *Nota* 492[da]., necnon ad Corollarium I[um]. Propositionis IV[tae]. Sectionis IX[nae]. *Analyse des Infiniment petits etc.*).

(503) Initium *Animadversionis*, cuius meminit paulo antea 498[va]. *Adnotatio*. Nam ibidem pag[a]. 60[ma]. *Cum autem in resolutione problematum id praecipue intendamus, ut peractis quae ad theoriam spectant, via inveniatur facilis, quae nos ad constructionem simplicissimam deducat, eum construendi modum in praxi commodissimum censeo, qui peragitur vel per fluxionem puncti, vel per tractionem Leibnitianam ....., et proinde motu perquam simplici et ad praxin aptissimo describi posse .....* (Identidem in Volumine I[mo]. eius *Operum* ad pag[am]. 132[dam]. Num[o]. XXIII[io]. *Iohannis Bernoulli animadversio etc.* veluti supra in *Nota* 498[va].)

(504) Depictum exstat in pag[a]. eâdem 93[a]., quam citavimus in superiori *Nota* 477[ma].

(505) Veterum Geometria praeter illud Nicomedis ab Eratosthene vituperatum,
6
quod hic geminata *Nota* ob intimum argumenti foedus complector, referta profecto fuerat organis ingeniosissimis inservientibus descriptioni Curvarum.[1] Li-

 bri

bri Καμαρικῶν Heronis Sectionum praesertim Coni aliorumque Corporum descriptioni organicae usui erant. Exemplum sit celeberrimum Parabolae organum, iniuria a recentioribus vindicatum, quod alibi illustrandum suscepi. De ipso Eutocius sic loquitur in *Commentariis* suis ad Librum Archimedis II^um^. *De Sphaera et Cylindro*, et signanter in *Modo Menechmi* (vide quoque pag^am^. 99., qua Lemma X^um^. sic inscriptum *Modum Menechmi, qui fit Corporum Sectionibus, explicare* illustratur, necnon *De Conoidibus et Sphaeroidibus* ad 233. 234., ac tandem ad 380^mam^. editionis a Rivalto curatae *Diabètou Helicographou*). *Descripta est autem Sectio rectanguli Coni cum diabeto invento a Milesio mechanico Isidoro magistro nostro, cum sit ab eo scriptum in Commentum camaricarum Heronis fili factum. Diabetum instrumentum est simile elemento graeco λ.* Rivaltus insuper l. c. in Libro *De Conoidibus et Sphaeroidibus* post Propositiones VIII^vam^. IX^nam^. ac X^mam^. Instrumentum ipsum deperditum adsequi studuit (praeeunte tamen Barocio ad eius fidem), *maxime cum non male Graecae λ figuram praeseferat* ut idem adfirmat.

(506) *Francisci a Schooten Leydensis de organica Conicarum Sectionum in plano descriptione = Lugduni Batavorum ex officina Elzeviriorum =.* Liber alias laudatus in *Nota* 85ta.

(507) *Opusculorum* Volumen I^um^. in *Enumeratione Linearum tertii ordinis* ad §^um^. VI^tum^. et pag^am^. 265^tam^. atque sequentes = *De Curvarum descriptione organica* =.

(508) Vide Operis huiusce compendium *An account a Book, entituled* = Geometria organica, sive Descriptio Linearum Curvarum universalis Auctore Colin Maclaurin = in Volumine XXXI^mo^. *Philosophical Transactions* pro annis M.DCC.XX. ac XXI. ad Num^um^. 364^tum^., et a pag^a^. 38va. usque ad 43^iam^. in Articulo X^mo^.

(509) *Nuovi Istromenti per la descrizione di diverse Curve antiche e moderne ec. = in Brescia =.*

(510) Laudandi praesertim Ioannes Polenus, qui inter *Epistolas* suas Instrumenta nova descripsit in *Tractoriam* Perraulti et Nepeti *Logarithmicam* delineandas (Comes Suardus l. c. ad pag^am^. 26^tam^. atque seqq.), necnon Eques D'Arcy, qui in *Actis Scientiarum Academiae Parisiensis* relatis ad annum M.DCC.LVIII^vum^. *Ovales* Cartesii filo circa *focos* apte disposito non secus ab *Ovali* conica depingere docuit, tametsi methodum istam antea aperuerint Boscovichius (anno M.DCC.XLVIII^vo^.) atque Suardus. (Vide *Opus* praecitatum pag^a^. 60. et sequentibus).

(511) *Commentarii Eutocii Ascalonitae* in Theorema I^um^. Libri II^di^. Archimedis *De Sphaera et Cylindro = Modus Platonis =.* Volumen I^um^. *Elementorum Geometriae Andreae Tacquet* editionis Romanae anni M.DCC.XLV^ti^. ad pag^am^. 173^iam^. Neminem autem latet Platonem IV^to^. ante Christum natum saeculo floruisse.

(512)

(512) Est Axioma *identitatis* geometricae Figurarum; quo posito Lineae rectae, Circuli arcuum, Angulorum, Polygonorumque adfectiones pene omnes illico demonstrantur.

(513) Idgenus periculum feci in Elementis *Stereometriae* faciliori methodo conscribendis ad instar *Planorum*.

(514) De Perseo iam dixi in *Adnotationibus* 191ma. et 410ma. ac §°. 61mo. Geminus autem iunior, qui dicitur Procli magister, praeter Opus antea citatum in *Nota* 479na. et *de Mathematicarum disciplinarum ordine* Librum conscripsit et saltem sex *Mathematicarum praeceptionum* Libros et *Enarrationes Geometricas*, quas una cum aliis iniuria temporum deletis, simulque cum Libris aeque deperditis Ι'στοριῶν Γ'εωμετρικῶν Theophrasti Eresii ex Insula Lesbo, Aristotelis discipuli, necnon Eudemi Rhodii de eodem argumento divinare ac restituere cordi habui. Seniorem Geminum Tyrium fuisse, iuniorem Rhodium Fabricius adserit in Libro III^{io}. *Bibliothecae Graecae*, editionis Hamburgensis anni M.DCC.VII^{mi}. Consulatur etiam eruditissima *Dissertatio* Meloti sub titulo *Recherches sur la vie d'Archiméde pour servir a l'Histoire des Mathematiques* in Volumine XIV^{to}. Parisiis edito vertente anno M.DCC.XLIII^{io}. a pag^{a}. 128va. ad 144^{tam}. *Histoire de l'Académie Royale des Inscriptions et Belles-Lettres avec les Mémoires &c. depuis l'année 1738. jusques & compris l'année 1740.* Etiam Hippocratem ex Insula Chio *Elementa* scripsisse *geometrica* Proclus adfirmat. Mathematica antiquorum Scripta, quae supersunt, collegit Philippus De la Hire anno M.DC.XCIII^{io}. (*Veterum Mathematicorum Opera Graec. et Lat. = Parisiis e Typ. Reg. =*). (Consulatur ad Num^{em}. 10um. et pag^{am}. 367^{mam}. Volumen II^{um}. *Actorum veterum Academiae Parisiensis* editionis Parisinae anni M.DCC.XXXIII^{ii}.

(515) Brevem, sed copiosum Institutionum Geometricarum *Cursum* soluta oratione ad instar antiquissimi Theonis in Euclidem *Colloquii* nobilibus olim Ephebis, de quibus loquitur *Adnotatio* 188va., dedicaveram. Ibidem et inventorum pleraque Federici Commandini de Frustis Pyramidum atque Conorum dimetiendis, et Machometi Bagdedini de Superficierum divisionibus, sive ut vulgo dicitur Geodesia, complexus eram, praesertim excerpta ex Bibliothecae Marucelliorum Florentinae Codice typographico Saeculi XVI^{ti}. (Errat Cl. Winkelmannus pag^{a}. 266ta. T^{i}. II^{di}. praestantissimi Operis sui in *Nota* 5ta. *Antelogii* citati dum Euclidem Alexandrinum *Elementorum Geometriae* Scriptorem cum Philosopho Euclide Megarensi Saeculo ante florente confundit). Nonnulla etiam et nova ex Lhuilierii divinaveram *Polygonometria* Genevae in lucem edita vertente anno M.DCC.XIC°.

(516) Potissimum illustraveram in *Apollonio nuperrimo* ea, quae perducunt ad demonstrationes Problematum Hugenianorum de Conoidalium Superficierum mensura, celeberrimi illius Theorematis ad Parabolen pertinentis, quo innititur eximia *Re-*

gula

gula Thomae Ba'eri (*The Geometrical Key, or construction of all Equations Linear, Quadratic, Cubic, and Biquadratic, by a Circle, and one only Parabole* 168 $\frac{3}{4}$) (*Trans. Phil.* N°. 157mo. ad pag^s. 549. et 550.), alterius, a quo eiusdem Parabolae per tangentes descriptio deducitur, etc. etc.

(517) Vide *Adnotationes* 378^{vam}. ac 379^{nam}. et inter Opera in lucem edita a Torricellio illud *De Solido Hyperbolico etc.* in secunda Paginarum numeratione ad pag^{in}. 93^{iam}. atque sequentes.

(518) Geometris antiquioribus praeter Rectas parallelas nonnisi Παραλληλοι κύκλοι innotuerant. Primus omnium Leibnitius Parallelas omnimodas Curvas ab evolutione ipsius Lineae genitas fuit contemplatus in Diario Lipsiensi Novembris anni M.DC.XCV^{ti}. (a pag^a. 93^{ia}. ad 95^{iam}. sub titulo *G. G. L. De novo usu Centri gravitatis ad dimensiones, et speciatim pro Areis inter Curvas parallelas descriptis, seu Rectangulis curvilineis; ubi & de Parallelis in universum.*). (Videantur etiam *Opera* Ioannis Bernoulli in Tomo I°. ad Num^{um}. XXIX^{num}. et pag^{as}. 153^{iam}. ac 154^{tam}.). Hôpitalius argumentum idem exornavit in Lemmate ac Corollariis I°. ac II^{do}. Propositionis II^{dae}. Sectionis IX^{ae}. *Analyse des Infiniment petits*. Postmodum Varignonus inter Memorabilia Regiae Scientiarum Academiae Parisiensis anni M.DCC.XIV^{ti}. *Reflexions sur l'usage, que la Mechanique peut avoir en Geometrie*) acu rem tetigit et Centrobaryca valde promovit.

(519) *Saggio sulla nuova Teoria del Calore*, quod specimen adhuc servo imperfectum ac MS. in illustrationem inventorum Adairi Crawfordi, et Dissertationis egregiae, cui titulus adpositus *Mémoire sur la Chaleur lû à l'Académie Royale des Sciences le 28. Juin 1783. par M^{rs}. Lavoisier & De La Place de la même Académie*.

(520) Consulatur *Adnotatio* 25ta. *Ioh. Henrici Lamberti Tentamen de vi caloris, qua corpora dilatat, eiusque dimensione* a pag^a. 172da. usque ad 243^{iam}. Idem Lambertus in *Berolinensibus Commentariis* pro anno M.DCC.LXXII^{do}. biennio post editis elegantissimas alias Curvas tam *thermometricas*, quam *hygrometricas* consideravit. (*Suite de l'Essai d'Hygrometrie* a pag^a. 65ta. ad 103^{iam}.).

(521) Nam ex Theoremate, quod Logarithmicam veluti Parabolam spectans demonstravi l°. c°. in *Nota* 11ma. *Autelogii*, quodliber spatium $ABF = PEG = PEFA - PGFA = (PA - EF)OV - (PA - GF)OR = PA.RV - EF.OV + GF.OR$, ideoque geometrice *quadrabile*, et infinite-longae areae mensuram Coronidis ad instar complectens. Ceterum modus ille, quo supra usi sumus ad Lineae Lambertianae *maximum* determinandum, originem ducit a Nicolao Bernoullio artificium pene idem experto in *Méthode pour trouver les Tautochrones dans des Milieux résistants comme le quarré des Vitesses*, et signanter ad pag^{as}. 92. 93. *Memorabilium* Parisiensis

sis Scientiarum Academiae relatis ad annum M.DCC.XXX^{um}., editis tamen vertente anno M.DCC.XXXII^{do}. Fortasse ab eodem fonte Thomas Perellius solutionem Problematis sui derivaverat, quod legitur pag^{a}. 8va. Partis I^{ae}. Voluminis VII^{mi}. *Diarii Literatorum Florentini* impressi sub annum M.DCC.LV^{tum}.

(522) Quam prolixa taediique plena fuerit in argumento etiam levissimo didascalica methodus antiquorum Geometrarum, abunde docet Ismael Bullialdus in Opere publici iuris facto labente anno M.DC.LVII^{mo}. sub titulo *Exercitatio geometrica de inscriptione et circumscriptione Figurarum, conicis Sectionibus, et Porismatibus*. Bullialdi tamen ingenio parum favet Cardinalis Michaëlis-Angeli Riccii iudicium in Epistola sua scripta sub diem 22^{dam}. Martii anni M.DC.LXVII^{mi}. (*Lettere inedite d' Uomini illustri* T. II. Angelo Fabronio curante etc.).

(523) Dimensionis ad instar recentiorum Geometriae omnium Corporum rotundorum lineamenta fortasse prima invenies in Libro IX^{no}. Partis IV^{tae}. Voluminis II^{di}. ad pag^{im}. 1005^{am}. et seqq. (*Comparatio Ungulae Cylindricae cum Sphaerica, et aliis Corporibus*) in Opere quampluries citato Gregorii a Sancto Vincentio.

(524) Ita Hôpitalius effecit in Propositione I^{ma}. Sectionis V^{tae}. ad pag^{am}. 106^{tam}. 3^{iae}. editionis *Analyse des Infiniment petits*. Cave vero ne censeas τὸ $\frac{zdt}{dx}$ *minimum* quiddam esse, propterea quod eius *differentiole* evanescat. Aliud est enim *differentiae* privatio in magnitudine *constanti*, aliud *differentia* nullescens in magnitudine *variabili* semel atque *maxima* vel *minimo* fuerit. Iniuria igitur ab Aequatione $dX = 0$, si de *maximis* vel *minimis* agatur, altera $X = C$ derivaretur, quemadmodum liquido constat.

(525) Gregorius Fontana Literis mihi scriptis die 7ma. Maii anni M.DCC.LXXXI^{mi}. expostulabat an Radius Circuli *osculatoris* absque praesidio *differentialium* 2^{di}. ordinis determinari umquam posset? (*Di grazia crede VS. Illma. possibile di trovare pe' raggj osculatori una formola libera dalle seconde differenze? E quando no'l sia, quale crede Ella dover esserne la ragione? Il solo ragionamento metafisico dovrebbe rispondere a queste due quistioni*. Responsum dedi negativum, quum 1^{mi}. ordinis *differentialia* statum Curvae quo ad Lineam rectam tangentem sistere valeant, sed inter Curvam ac Tangentem innumerae ex Elementis duci queant Circulares Circumferentiae, quarum una tantummodo, per *differentias* secundas idcirco enucleanda, Curvae ipsius *osculatrix*. Hanc autem doctrinam maximopere postmodum amplificaverunt Aloysius De La Grange in *Commentariis Berolinensibus* pro anno M.DCC. LXXIX^{no}. editis anno M.DCC.LXXXI^{mo}. a pag^{a}. 138va. ad 149^{nam}. = *Article troisième = Des différent ordres de Contact, et de la maniere de trouver des Courbes qui aient avec une infinité de Courbes données des Contacts d' un ordre donné*, Bernoullius

 iunior

iunior in *Estai d'une nouvelle maniere d'envisager les Différences ou les Fluxions des quantités variables* inter *Mémoires des Correspondans* ad pag^{im}. 151^{am}. et seqq. Partis II^{ae}. Voluminis *Actorum Academiae Taurinensis* pro annis M.DCC.LXXXIV^{to}. et LXXXV^{to}., ac doctissimus Abbas Thomas Valperga De' Caluso a Secretis eiusdem Academiae in *Addition etc.* et praesertim a pag^{a}. 157ma. usque ad calcem suae Ἀντιδιατριβῆς praecitato Volumine comprehensae, quo loci de contactibus et osculis varii gradus (quorum postremorum prima *species* eadem est cum contactu secundi ordinis) mirum in modum summaque mentis acie disceptat. Iucunda est etiam ac suculenta altera *Disquisitio* in Partes duo distributa eiusdem Auctoris, atque inserta in Volumine Taurinensi pro annis 1786. — 1787., edito vertente anno M.DCC.LXXXVIII^{vo}. (a pag^{a}. 489na. ad 591^{mam}.) sub titulo *Des différentes manieres de traiter cette partie des Mathématiques que les uns appellent Calcul differentiel, & les autres Méthode des fluxions*.

(526) De Curvis, quas voco *rectificatrices* atque *complanatrices*, in ipsa Calculi Integralium origine perlege *Memorabilia Scientiarum Academiae Parisiensis* pro anno M.DCC.I^{mo}., et signanter ad pag^{am}. 159^{am}. ubi titulus exstat *Méthode pour la rectification des Lignes courbes par les Tangentes*. (Editio Parisina M.DCC.XIX.). Adde Disquisitionem *Sur la Quadrature des Courbes* in Historia eiusdem Academiae anni M.DCC.XI^{mi}. a pag^{a}. 62da. usque ad 67^{mam}. *par M. Bragelonne*, ne loquar de antiquiore et iam memorato Craigii Tractatu circa *Quadraturas etc.*, edito vertente anno M.DC.XCIII^{io}.

(527) Quomodo Superficiei cuiuscumque dimensio, scilicet, $\int dxdy \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ dum Aequatio Superficiei *datae* fuerit $dz = pdx + qdy$, ab Elementis *immediate* prosiliat, videbis in III^{ia}. Sectione mei *Tractatus* alias recensiti *de Solidis Cochlearibus*. Interea mirari non desinam quanam de caussa per tot tantasque ambages erraverit in *elementum* Superficiei statuendum Auctor *Dissertationis* illius, cuius meminit initium *Notae* 171^{mae}.

(528) Ad calcem chartacei manipuli, cui a Vincentio Viviano titulus fuit olim praepositus sermone italico *Solidi*. Plurima hic loci inveniuntur elegantissima de Indivisibilium *armillarium* Conicorum usu, ac geometrica comparatione.

(529) Calculi facillimi typum fortasse iuverit oculis Lectorum subiicere. Supposito 1 Radio Circuli *genitoris* fit Areae quaesitae *elementum* aequale $\int (1 + Cos.\, x)$

$$(-d\, Cos.\, x) + \int x \left(\frac{1 + Cos.\, x}{Sin.\, x}\right)(-d\, Cot.\, x) = -\, Cos.\, x - \frac{Cos^2.\, x}{2} + \frac{x^2}{2} + x.$$

$$Sin.\, x - \int dx\, .\, Sin.\, x = -\, Cos.\, x - \frac{Cos^2.\, x}{2} + \frac{x^2}{2} + x.\ Sin.\, x + Cos.\, x + C =$$

1 —

$\frac{1 - Cos^2. x}{2} + x . Sin. x + \frac{x^2}{2}$ (quia dum $x = 0$ est $- \frac{Cos^2. x}{2} = - \frac{1}{2}$), ac tandem $= \frac{(x + Sin. x)^2}{2}$, seu dimidio Quadrati *Ordinatae* Cycloidis ut praedicta *regula* iusserat. Exinde fluit Areae Curvae dimidium par semissi Quadrati semicircumferentiae Circuli *genitoris* ob *Sin. x* eo casu evanescentem; totaque idcirco Area aequalis Quadrato eiusdem semicircumferentiae, nimirum ad productum ipsius semicircumferentiae in Radium, vel Aream *genitoris*, ut semicircumferentia ad Radium, aut Circumferentia ad Diametrum, quemadmodum innui. Quod autem ab Euclide paulo superius deduxi de $d(e^x) (= e^{x+dx} - e^x) = e^x dx$ luculentissime ostendit quanti maior facilitas adsit in Integrale detegendum $\int \left(a\left(1 + \frac{b}{a}\right)^{t+dt} - a\left(1 + \frac{b}{a}\right)^t \right) = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)^t + C$, fusius pertractatum a Cl. Gregorio Fontana in III[la]. Papiensium *Disquisitionum* alibi recensitarum (vide eiusdem *Disquisitionis* §. 11[mum]. paginasque 66[tam]. ac 67[mam]. invicem comparandas), quum nihil aliud sit praeter $a\int [\varphi(x + dx) - \varphi x] = a\varphi x + C$ universaliter haustum ex ipsamet *Differentialis* Calculi definitione.

(530) Tota huiusce Lucubrationis ars studiumque in eo positum est, quod formulae *aequationum conditionalium* in unicam resolvantur $\frac{ddz}{dxdy} = \frac{ddz}{dydx}$ dum $z = \varphi(x, y)$. Aequatio illa simplicior ab Eulero seniore faciliter admodum demonstratur in *Commentariis Berolinensibus* anni M.DCC.LIII[ii]. ad pag[am]. 208[vam]. et §[um]. XXI[mum]. *Remarques sur les Mémoires précedens de M. Bernoulli*. Quam caute aliquando Aequatio eadem tractari debeat docet Le Gendre in Volumine *Parisiensis Scientiarum Academiae* anni M.DCC.LXXXVII[mi]., edito vertente anno M.DCC.LXXXIX[no]. (*Nota* (*) ad pag[am]. 311[am]. τῆς *Mémoire sur l'Intégration de quelques E'quations aux différences partielles*). Ceterum demonstratio postremo loco ab Eulero tradita valde distat ab ea, quam adpellare liceat totius doctrinae caput et columen, omnique rei de *variationum Calculo* promovendae parem, et primus invenit Leibnitius. Hoc potissimum duce Alexis Fontainius vertente anno M.DCC.XXXVIII°. Integralem Algorithmum a novis potius fundamentis erexisse quam instaurasse censendus est, quod argumentum serius equidem at elegantissime more suo et noviter acu tetigit Ioannes-Henricus Lambertus in Classe τῆς *Philosophie speculative* a pag[a]. 441[ma]. ad 485[tam]. Voluminis XVIII[vi]. ad annum M.DCC.LXII[dum]. *Berolinensis Scientiarum et Humaniorum Litterarum Academiae*. Nam usque ab anno M.DCC.LXVIII[vo]. labente (*lû le* 15. *de Décembre*) Disquisitionem protulit ita inscriptam *Sur la methode du Calcul Intégral*. Quaenam Cl. Condorceto debeantur incrementa doctrinae,

quibusve

quibusve eadem coërceatur limitibus ad posteriorum Lucubrationum fidem doctissimorum Geometrarum De La Place, Monge, ac Lexellii, brevi edisseram, si fors dederit, in *Prodromi Continuatione* iam typis parata. Interea ut eruditissimo Guidoni Savino Senensis Academiae Curatori publicum tester obsequii mei monumentum, eius de *Prodromo* ipso iudicium, quod equidem maximi censeo, in vulgus prodire haud ingratum futurum iri sum arbitratus. Eximius itaque Scriptor Pridie Kal. Apriles vertentis anni M.DCC.XCI^{mi}. Epistolam misit, quae sequitur ex apographo impressa, ad amplissimum excellentissimumque Virum Vincentium Martinum (ingenii acumine nulli secundum) Senensis Ditionis universae Praefectum et R. C. FERDINANDI III^{ii}. Domini mei a Consiliis sanctioribus. *Nel brevissimo tempo, che ho avuto, ho letto e percorso con sommo piacere il Prodromo di Osservazioni sopra il Trattato di Calcolo Integrale del Sig. Marchese di Condorcet. Nel render dunque giustizia alla profondità del sapere del chiarissimo Autore, e mio rispettabilissimo Amico mi dispiace all' estremo che il mio giudizio sia di pochissima autorità. Non ostante io devo ingenuamente confessare di avere ammirato com' egli con l' ultima evidenza e con somma solidità di ragionamenti provi in due Articoli che l' equazioni di condizione stabilite dal Marchese di Condorcet hanno tutto il loro fondamento nel Teorema di Leibnitz, e da esso derivano direttamente tutte l' Equazioni di condizione trattate da Mr. Fontaine, e di più che possono col suddetto principio Leibnitziano con eleganza e speditezza maggiore dimostrarsi, et anco diversamente dal Metodo generale usato dallo stesso Sig^r. di Condorcet.*

Le Note poi, con le quali il dottissimo Autore adorna et arricchisce la sua Memoria, non possono al parer mio essere più confacenti a dimostrare e a confermare il suo assunto, nè più proprie per far vedere la sua erudizione solida e stesa sopra tutta la Provincia Filosofica e Matematica.

Prego V. E. di fargli per mia parte i più vivi ringraziamenti per l' onorevol memoria, che conserva di me, che è l' unica cosa, di cui con ragione posso esser vano. Etc. Qua in Epistolae humanissima communicatione vel me a perantiqua, quam plurimi facio, Martini consuetudine summopere honestatum, vel a Savini comitate et facundia, nescire magis quam scire lubet, *quum maxima laudum sit a laudato Viro laudari*.

SYNO-

SYNOPSIS

EXERCITATIONIS MATHEMATICÆ

DE INTEGRALIBVS AB ELLIPSEΩS ET HYPERBOLÆ ARCVBVS DERIVANDIS.

Inveniuntur Semiaxes Ellipseos, a qua *Summa* illa dependet in toto et in partibus, eorum Proportio, varii *Functionis* eiusdem adspectus etc. ibid. et 69.

§. 36. Ab eodem Cylindro *scaleno*, sive a doctrina Pascalii, Formula deducitur elementi Arcus Elliptici ad Axem minorem relati $\frac{dx\sqrt{a^2+\left(\frac{p}{2a}-1\right)x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$, quam alii a Calculo *Differentialium* sunt consequuti. 70. 71.

Quin etiam universalius Integrale $\int\frac{dx\sqrt{f+gx^2}}{\sqrt{h-kx^2}}$ eidem *elementari* doctrinae refertur. ibid.

Axes, Abscissae, Parameter, Coëfficientes, *limites* etc. generalibus Formulis perhibentur. ibid. et 72.

§. 37. Idem de elemento praedicatur consimili Arcus Ellipseos ad maiorem Axem spectantis. ibid.

Idem de altero Integrali $\int\frac{dx\sqrt{f-gx^2}}{\sqrt{h-kx^2}}$. ibid. et 73.

§. 38. Transitu facto ab Ellipsi ad Hyperbolen conicam, non modo profluit *imaginariorum* ope *Functio transcendens*, quae praebeat elementum Arcus Hyperbolici

$\frac{dx\sqrt{a^2+\left(\frac{p}{2a}+1\right)x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}$ dum Curva ad secundum Axem referatur, verum etiam Integrale universalius

$\int\frac{dx\sqrt{f+gx^2}}{\sqrt{h+kx^2}}$ quoad *limites* sinant. ibid. et 74.

§. 39. Simplicior denique arguendi modus, et pariter *imaginariis* rite recteque adhibitis, elementum tribuit Arcus Hyperbolae ad primum Axem comparatae, nimirum,

$\frac{dx\sqrt{\left(\frac{p}{2a}+1\right)x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}}$. ibid.

Exinde nascitur Integrale huius formae generalioris

$\int\frac{dx\sqrt{gx^2-f}}{\sqrt{kx^2-h}}$ cum suis *limitibus*. 75.

Quum autem $\int\frac{dx\sqrt{gx^2-f}}{\sqrt{kx^2-h}}=\int\frac{\sqrt{-1}\,.\,dx\sqrt{gx^2-f}}{\sqrt{-1}\,.\sqrt{kx^2-h}}=$

$\int\frac{dx\sqrt{f-gx^2}}{\sqrt{h-kx^2}}$, quod postremum Integrale non ad Arcum Hyperbolae, sed Ellipseos pertinet per §^{um}. 37^{mum}.,

S E L E C T A

EX ADNOTATIONIBVS PRÆCIPVIS IN TOTIVS EXERCITATIONIS CONTEXTVM.



Sequuntur Tabulae tres ære insculptae. Sphalmata in re difficili molestaque fortasse detegenda ad mentem *Adnotationum* 166[tae]. ac 242[dae]. eruditus Lector castiget. Aureas vero ad hoc ius statuendum moderandumque summorum hominum subiunctas sententias aequus iudex sibi semper obiiciat oportet. Latinas aliquando voces et earum syntaxin uno alterove modo, sed Scriptorum exemplis innixus melioris notae, indiscriminatim adhibui, paucisque, quod sciam, usus sum a recta Grammatice recedentibus, at Mathematicorum consuetudine sancitis dictionibus.

In hac secunda Principiorum editione multa sparsim emendantur, et nonnulla adiiciuntur.

(Newtonus in Praefatione editionis Cantabrigiensis anni M.DCC.XIII[ii].).

M. D' Alembert aiant fait l'honneur à ma solution du Problême des Cordes vibrantes de l' attaquer sur quelques points par un Ecrit particulier imprimé dans le premier Tome de ses Opuscules Mathematiques &c.

(De La Grange initio Disquisitionis, cui titulum posuit *Addition à la premiere partie des Recherches sur la nature et la propagation du Son &c.*, ad pag[am]. 323[iam]. Voluminis *Mélanges de Philosophie et de Mathématique &c. pour les années* 1760 — 1761 Regiae Augustae-Taurinorum Societatis.)

Je passe sous silence la plaisanterie qu'il essaye de me faire pag. 313., *parce que l' essentiel n' est pas ici d' être plaisant.*

(Alembertus in Danielem Bernoullium ad pag[am]. 240. Voluminis Academiae Berolinensis pro anno 1763. *Extrait de différents Lettres de Mr. d' Alembert a Mr. De La Grange* §°. VII[mo].)

Antiquorum apophtegmatum collectanea, ex Socrate praesertim, Platone, Diogene, Euripide, Timone Μισάνθρωπω, aliisque sapientibus, videnda sunt gallice versa ab eruditissimo Abbate Barthelemy in *Voyage du Jeune Anacharsis en Grèce*, quorum alibi singulariter mentionem inibo. Interea consulatur pag[a]. 189[na]. Voluminis VI[ti]. editionis M.DCC.XC., memoriaeque commendetur effatum illud excellentissimum

Ἀλήθεια καὶ Τιμή.

F I N I S.



TAB. I.ᴬ

4.

5.

6.

9.

10.

11.

12.

15.

16.

17.

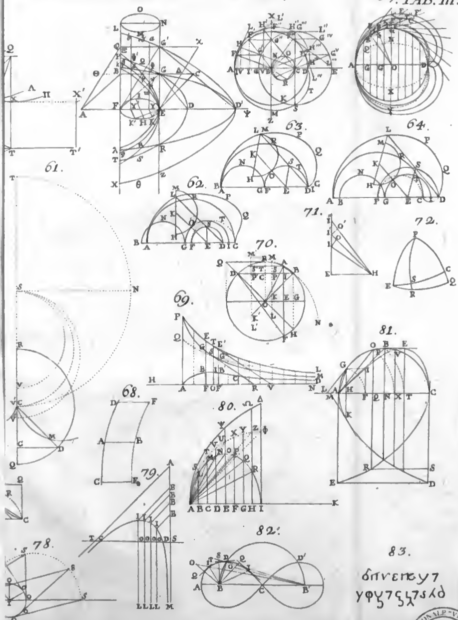
24.

25.

26.

TAB.^A II.^A

29. 30. 31. 32. 35. 36. 37. 42. 43. 44. 45. 48. 49. 50. 51.



Caiet. Vascellini sculpsit



